1. CÂMPUL ELECTROMAGNETIC

O undă electromagnetică este compusă din două câmpuri ortogonale, variabile în timp: câmpul electric şi cel magnetic. Fiecare dintre ele are proprietățile lui specifice, care sunt înmănuncheate de ecuația undelor, formând astfel bazele matematice ale teoriei propagării undelor electromagnetice.

1.1 CÂMPUL ELECTRIC

Este generat de orice sarcină electrică şi este definit prin intermediul forței (electrostatice) pe care o exercită asupra unei sarcini electrice unitare (sarcină "de probă"), care se presupune că este sub influența sa. Notația consacrată pentru câmpul electric este $\overline{E}$, iar unitatea de măsură este $\left[\frac{V}{m}\right]$. Se poate observa echivalența $1\frac{V}{m} = 1\frac{N}{C} = 1\frac{kg \cdot m}{C \cdot s^2} = 1\frac{kg \cdot m}{A \cdot s^3}$.

Câmpul electric depinde de fluxul electric $\overline{D}$ (sau de densitatea de flux) şi de permitivitatea dielectrică a mediului (materialului), ε, după relația:

$$\overline{D} = \varepsilon \cdot \overline{E} \tag{1.1}$$

Legea fluxului electric $\left(\Phi_E = \oint_\Sigma \overline{E} \cdot d\overline{s}\right)$ sau legea lui Gauss afirmă că integrala inducției electrice pe o suprafață închisă este egală cu sarcina electrică din interiorul acesteia:

$$\oint_\Sigma \overline{D} \cdot d\overline{s} = q_\Sigma \tag{1.2}$$

Din aceasta rezultă şi unitatea de măsură a inducției electrice: $\left[\frac{C}{m^2}\right]$.

Vectorii $\overline{E}$, respectiv $\overline{D}$ au originea în sarcinile pozitive şi extremitatea în cele negative sau la infinit; acestea sunt şi sensurile liniilor de câmp, după cum se poate observa şi în figura 1.1.

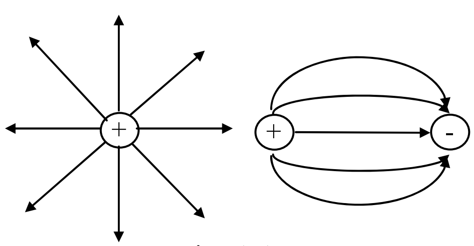


Fig. 1.1

Tabelul 1.1

Sursa câmpului	Simetrie	$\overline{E}$
Sarcină punctiformă	Sferică	$\overline{E} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} \cdot \frac{\overline{r}}{r}$
Sarcină distribuită uniform pe o lungime infinită	Cilindrică	$\overline{E} = \frac{\rho_l}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r} \cdot \frac{\overline{r}}{r}$
Sarcină distribuită uniform pe o suprafață infinită	Plană	$\overline{E} = \rho_s \cdot \frac{\overline{z}}{z}$

În tabelul 1.1 sunt date expresiile câmpului electric produs de unele distribuții clasice de sarcină electrică: sarcină punctiformă, sarcină uniform distribuită cu densitatea $\rho_l \left[\frac{C}{m}\right]$ în lungul unui fir infinit, respectiv sarcină uniform distribuită cu densitatea $\rho_s \left[\frac{C}{m^2}\right]$ pe o suprafață infinită.

Permitivitatea dielectrică a materialului, ε, este (după cum îi spune şi numele) o proprietate specifică dielectricilor; în materialele conductoare nu se poate stabili un câmp electric.
Permitivitatea poate fi înțeleasă ca şi cantitatea de sarcină electrică ce se acumulează pe frontiera materialului şi se măsoară în $\left[\frac{F}{m}\right]$. De obicei se exprimă prin intermediul permeabilității relative (sau constanta dielectrică a materialului), ε_r, care este un factor ce multiplică permeabilitatea vidului, ε_0:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

Cu o bună aproximație se poate considera că $\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$.

Materialele care prezintă electroni liberi în structura electronică (a ultimului strat) se numesc conductoare. Acestea sunt caracterizate de conductivitatea electrică $\sigma \left[\frac{S}{m}\right]$, sau de inversul acesteia, rezistivitatea $\rho \left[\Omega \cdot m\right]$, unde $1S = 1\Omega^{-1}$. Materialele cu o conductivitate foarte mică se numesc izolatoare, un dielectric perfect fiind caracterizat de $\sigma = 0$. Dielectricii reali sunt caracterizați de o permitivitate dielectrică şi de o conductivitate nenule. Pierderile în dielectrici sunt cu atât mai mari cu cât le creşte conductivitatea. La abordarea efectului neidealității materialelor asupra undelor electromagnetice, permitivitatea se va exprima ca un număr complex ce depinde de constanta dielectrică, conductivitate şi frecvența undei.
În conductoare nu se poate stabili un câmp electrostatic, deoarece electronii liberi din structura materialului se vor deplasa (sub acțiunea forței electrostatice $\overline{F} = q \cdot \overline{E} = -e \cdot \overline{E}$), până când câmpul este compensat. Astfel, când un conductor se află sub influența unui câmp electric, suficient de mulți electroni se vor deplasa spre suprafața conductoare, compensând astfel câmpul inițial. În acest mod rezultă acumularea de sarcină pe suprafață (sarcină superficială), fenomen ce stă la baza funcționării condensatoarelor (capacitoarelor)
Teorema potențialului electrostatic afirmă că circulația câmpului electric în jurul oricărei curbe închise este nulă:

$$\oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot d\overline{l} = 0 \tag{1.3}$$

Orice câmp cu proprietatea menționată mai sus se numeşte câmp irotațional sau câmp potențial. Ca urmare, câmpul electric face parte din categoria câmpurilor potențiale. Astfel, se poate defini potențialul (electrostatic):

$$V_B = V_A - \int_A^B \overline{E} \cdot d\overline{l}, \tag{1.4}$$

integrala fiind independentă de drum datorită teoremei potențialului electrostatic:

$$\oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot d\overline{l} = 0 \Leftrightarrow \int_{\substack{A \\ \Gamma_1}}^{B} \overline{E} \cdot d\overline{l} + \int_{\substack{B \\ \Gamma_2}}^{A} \overline{E} \cdot d\overline{l} = 0 \Leftrightarrow \int_{\substack{A \\ \Gamma_1}}^{B} \overline{E} \cdot d\overline{l} = \int_{\substack{A \\ \Gamma_2}}^{B} \overline{E} \cdot d\overline{l},$$

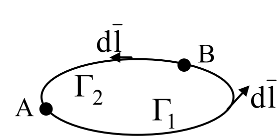


Fig. 1.2

după cum se poate urmări şi în figura 1.2.

Diferența de potențial este $U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \overline{E} \cdot d\overline{l}$.

Legea conservării sarcinii electrice afirmă că sarcina totală a unui sistem izolat (electric) este constantă. Sarcina însă se poate deplasa în interiorul sistemului, variația acesteia în unitatea de timp şi pe unitatea de suprafață definind curentul electric: $i = -\frac{dq}{dt}$. (1.5)

1.2 CÂMPUL MAGNETIC

Un câmp magnetic static poate fi generat de un curent electric constant sau de un material magnetic (magnet permanent). Ca şi câmpul electric, câmpul magnetic este caracterizat de două mărimi vectoriale: intensitatea câmpului magnetic, $\overline{H}$, şi inducția magnetică, $\overline{B}$. Acestea sunt legate între ele printr-o relație similară cu (1.1):

$$\overline{B} = \mu \cdot \overline{H} \tag{1.6}$$

în care mărimea μ se numeşte permeabilitate magnetică a materialului în care se stabileşte câmpul magnetic. De obicei, permeabilitatea magnetică se exprimă prin intermediul permeabilității relative, μ_r, care este un factor de multiplicare a permeabilității magnetice a vidului (permeabilitatea absolută), μ_0:

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

Unitățile de măsură ale mărimilor amintite sunt: $\left[\frac{A}{m}\right]$ pentru H, [T] pentru B, respectiv $\left[\frac{H}{m}\right]$ pentru μ; $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$.

Intensitatea câmpului magnetic este dependentă de curenții electrici ce o produc, conform legii circuitului magnetic (teorema lui Ampere):

$$\oint_{\Gamma} \overline{H} \cdot d\overline{l} = \sum i \tag{1.7}$$

unde Γ este o curbă închisă, ce înlănțuie curenții i, sursele câmpului magnetic.

Teorema lui Ampere se poate particulariza pentru diverse structuri particulare ale circuitelor parcurse de curent. De exemplu, pentru calculul câmpului magnetic produs de o spiră parcursă de curent se foloseşte expresia cunoscută sub numele de legea Biot-Savart-Laplace:

$$\overline{H} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{I \cdot d\overline{l} \times \overline{r}}{r^3} \tag{1.8}$$

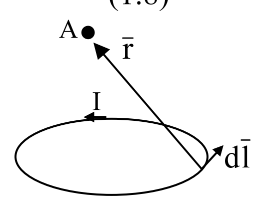


Fig. 1.3

unde:

- I este curentul ce parcurge spira;
- $d\overline{l}$ este elementul de lungime, orientat în sensul curentului;
- $\overline{r}$ este distanța de la punct la $d\overline{l}$.

În figura 1.3 se poate observa modul de calcul al vectorului $\overline{H}$ în punctul A.

Rezultă că se poate calcula $\overline{H}$ în orice punct din spațiu, de interes maxim fiind cele situate pe normala la planul spirei, construită în centrul acesteia.

Fluxul magnetic caracterizează numărul liniilor de câmp magnetic pe unitatea de suprafață:

$$\Phi_B = \int_{\Sigma} \overline{B} \cdot d\overline{s} \tag{1.9}$$

Legea fluxului magnetic afirmă că indiferent de suprafața (închisă) care înmănunchează toate liniile de câmp, fluxul este acelaşi, adică:

$$\Phi_B = \oint_{\Sigma} \overline{B} \cdot d\overline{s} = 0 \tag{1.10}$$

Se poate observa o analogie între teorema potențialului electrostatic şi legea circuitului magnetic – (1.3) şi (1.7), respectiv între legile fluxurilor (electric şi magnetic) – (1.2) şi (1.10), Aceasta din urmă indică absența sarcinii magnetice elementare, elementul fundamental în magnetism fiind dipolul magnetic, caracterizat de un pol Nord şi unul Sud. Fragmentarea (oricât de) repetată a unui magnet nu va reuşi să separe cei doi poli magnetici, ci doar să creeze o multitudine de "magneței" mai mici, fiecare cu propriii săi poli N şi S.
Ținând cont de similitudinea între legile celor două fluxuri, rezultă unele proprietăți similare ale acestora. Una dintre ele este conservarea componentelor normale ale vectorilor $\overline{D}$ şi $\overline{B}$ la trecerea dintr-un mediu în altul. Întrucât această proprietate este importantă la propagarea undelor electromagnetice, va fi demonstrată în continuare.

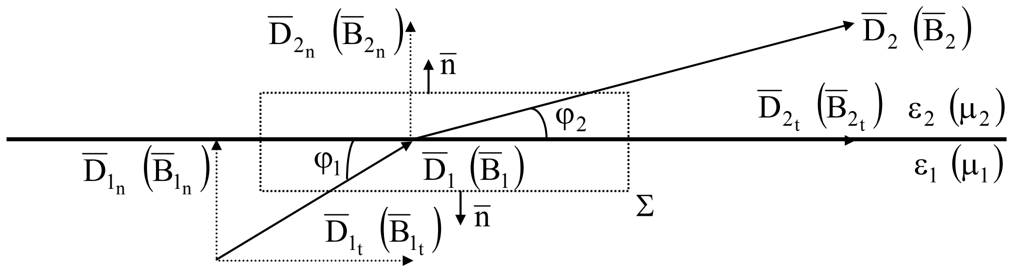


Fig. 1.4

Situația imaginată este reprezentată în figura 1.4, în care se consideră că suprafața de demarcație între cele două medii nu este încărcată cu sarcină electrică (respectiv nu există surse ale unui câmp magnetic). Demonstrația se va face pentru legea fluxului electric, pentru fluxul magnetic situația fiind absolut similară.
Dacă se consideră o suprafață închisă Σ în jurul suprafeței de separație între cele două medii, legea fluxului electric (magnetic) corespunzătoare acesteia se scrie:

$$\oint_{\Sigma} \overline{D} d\overline{s} = q_{\Sigma} = 0 \; ; \; \left(\oint_{\Sigma} \overline{B} d\overline{s} = 0 \right)$$

Cum $\overline{D} = \overline{D}_n + \overline{D}_t$ şi $\overline{D}_t \cdot \overline{n} = 0$ (deoarece $\overline{D}_t \perp \overline{n}$), rezultă că $\overline{D}_{1_n} \cdot \overline{n} + \overline{D}_{2_n} \cdot \overline{n} = 0$, adică $D_{1_n} - D_{2_n} = 0$; analog, $B_{1_n} = B_{2_n}$.
Mai mult: aplicând teorema potențialului electrostatic pe o curbă închisă, Γ, în jurul suprafeței de separație (respectiv teorema lui Ampere), se scrie relația:

$$\oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot d\overline{l} = 0 \; ; \; \left(\oint_{\Gamma} \overline{H} \cdot d\overline{l} = \sum i = 0 \right)$$

Cum $\overline{E}_t \cdot d\overline{l} = 0$, rezultă că $E_{1_t} = E_{2_t}$ şi, analog (folosind teorema lui Ampere) $H_{1_t} = H_{2_t}$, adică se conservă şi componentele tangențiale ale intensității câmpului electric (magnetic).
Ținând cont de aceasta, se poate găsi o relație între unghiurile φ_2 şi φ_1:

$$\left. \begin{aligned} tg\varphi_1 &= \frac{D_{1_n}}{D_{1_t}} \\ tg\varphi_2 &= \frac{D_{2_n}}{D_{2_t}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{tg\varphi_2}{tg\varphi_1} = \frac{D_{1_t}}{D_{2_t}} = \frac{\varepsilon_1 \cdot E_{1_t}}{\varepsilon_2 \cdot E_{2_t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \Rightarrow \varphi_2 = arctg\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot tg\varphi_1 \right) \qquad (1.11)$$

Analog, pentru câmpul magnetic rezultă:

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot \operatorname{tg}\varphi_1\right) \tag{1.12}$$

Relațiile (1.11) şi (1.12) sugerează câteva cazuri particulare extrem de importante. Astfel, dacă unghiul de incidență al câmpului (electric sau magnetic) cu suprafața de separație este $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, atunci din (1.11) sau (1.12) rezultă evident $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, adică nu există refracție. De asemenea, $\varphi_2 \cong \frac{\pi}{2}$ dacă $\varepsilon_1 >> \varepsilon_2$, respectiv $\mu_1 >> \mu_2$. Un exemplu poate fi la trecerea câmpului magnetic dintr-un material feromagnetic $(\mu_r > 1000)$ în aer $(\mu_r = 1)$: liniile de câmp vor fi normale la suprafața magnetului.

1.3 CÂMPUL ELECTROMAGNETIC

Legea inducției electromagnetice (Faraday) este una dintre legile fizicii care a fost dedusă direct în urma celebrelor experiențe ale lui Michael Faraday (în Anglia) şi Joseph Henry (în SUA) în anul 1831. Ea afirmă că un flux magnetic variabil în timp generează o tensiune electromotoare (t.e.m.) la bornele unui circuit electric ce se află sub influența câmpului magnetic respectiv:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{1.13}$$

Semnul "-" este dat de legea conservării energiei, care în acest caz se manifestă sub denumirea regulii lui Lenz, care afirmă că efectul t.e.m. (curentul ce apare prin circuit) generează la rândul său un (alt) flux magnetic care să se opună celui inițial. Adoptarea ipotezei contrare ar însemna acceptarea ideii că natura se autodistruge.

Relația (1.13) pune în evidență un fapt remarcabil, cu implicații majore în progresul tehnologic din ultimii 100-150 de ani: un câmp magnetic variabil generează o tensiune electrică (deci un câmp electric), care produce un curent variabil, care la rândul său generează un câmp magnetic variabil, etc. Cu alte cuvinte, câmpurile magnetic şi electric variabile se generează reciproc, constituind astfel ceea ce se numeşte câmpul electromagnetic.

Legile prezentate succint în aceste paragrafe au fost descoperite în decursul timpului de către diverşi învățați ai vremurilor respective. În anul 1873, pornind atât de la cunoştințele acumulate de înaintaşii săi cât şi de la cercetările şi experiențele sale, , James Clerk Maxwell a publicat lucrarea „A Treatise On Electricity And Magnetism", care a pus bazele teoriei moderne a electromagnetismului. De atunci legile fundamentale menționate în paragrafele anterioare sunt cunoscute drept "ecuațiile lui Maxwell". Succint, acestea sunt următoarele:

$$\begin{cases} \varepsilon \cdot \oint_{\Sigma} \overline{E} \cdot d\overline{s} = q_{\Sigma} \\ \mu \cdot \oint_{\Sigma} \overline{H} \cdot d\overline{s} = 0 \\ \oint_{\Gamma} \overline{B} \cdot d\overline{l} = \mu \cdot i = -\mu \cdot \frac{dq}{dt} = -\mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{d\Phi_E}{dt} \\ \oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot d\overline{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \end{cases} \tag{1.14}$$

2. OSCILAȚII ȘI UNDE ELECTROMAGNETICE

Pentru a putea vorbi despre oscilații electromagnetice, trebuie introduse mai întâi două mărimi fizice, anume capacitatea şi inductanța.

- Dacă se consideră două corpuri (armături, ca în figura 2.1) încărcate cu sarcinile electrice +q şi –q, atunci ele vor fi caracterizate de potențialele V_1 şi V_2 (față de referință, care se consideră că este punctul de la ∞).

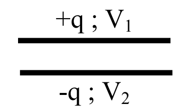


Fig. 2.1

  Atât V_1 cât şi V_2 sunt dependente de q, deci se poate exprima o relație de tipul

  $$q = C \cdot (V_1 - V_2) = C \cdot U$$

  Constanta de proporționalitate C se numeşte capacitate electrică şi se defineşte:

  $$C = \frac{q}{U} \tag{2.1}$$

  adică raportul dintre (acumularea de) sarcină (fluxul electric) şi diferența de potențial ce o produce. Dispozitivul de circuit care înmagazinează o capacitate se numeşte condensator sau capacitor electric şi are simbolul prezentat în figura 2.2a. Mărimea capacității depinde de geometria armăturilor, de distanța dintre ele şi de permitivitatea dielectrică a izolatorului. Unitatea de măsură a capacității electrice este Faradul [F]; din definiția (2.1) rezultă că $1F = \frac{1C}{1V}$.

  Între armăturile condensatorului există câmp electric, deci energie (electrică). Valoarea acesteia este:

  $$W_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} \tag{2.2}$$

- Dacă se consideră un circuit (un fir conductor) parcurs de curentul I, atunci în jurul acestuia se va genera un câmp magnetic, adică un flux magnetic, ambele dependente de valoarea curentului I:

  $$\Phi_B = L \cdot I$$

  Constanta de proporționalitate L se numeşte inductanță şi se defineşte:

  $$L = \frac{\Phi_B}{I} \tag{2.3}$$

  adică raportul dintre fluxul magnetic şi curentul ce-l produce. Dispozitivul de circuit care înmagazinează o inductanță se numeşte (de obicei) bobină şi are simbolul prezentat în figura 2.2b. Mărimea inductanței depinde de geometria bobinei, de numărul de spire şi de permeabilitatea magnetică a mediului în care se generează câmpul magnetic. Unitatea de măsură a capacității electrice este Henry [H]; din definiția (2.3) rezultă că $1H = \frac{1Wb}{1A}$.

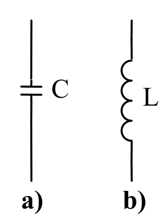


Fig. 2.2

  În jurul bobinei există câmp magnetic, deci energie (magnetică), a cărei valoare este:

  $$W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \tag{2.4}$$

Rezultă că bobinele şi condensatoarele sunt elemente care acumulează/cedează energie magnetică/electrică. În acest sens, regula lui Lenz poate fi reformulată: fluxul magnetic (în cazul unei bobine), respectiv fluxul (sarcina) electric(ă) (în cazul unui condensator) se conservă (nu pot varia "brusc").

2.1 SISTEME OSCILANTE CU CONSTANTE CONCENTRATE

Se va considera sistemul LC din figura 2.3, în care se consideră că inițial (figura 2.3a) C este încărcat cu sarcina Q. Energia acumulată între armăturile condensatorului este $W_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$, iar energia bobinei $W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = 0$, deoarece în acest moment nu există curent în circuit.

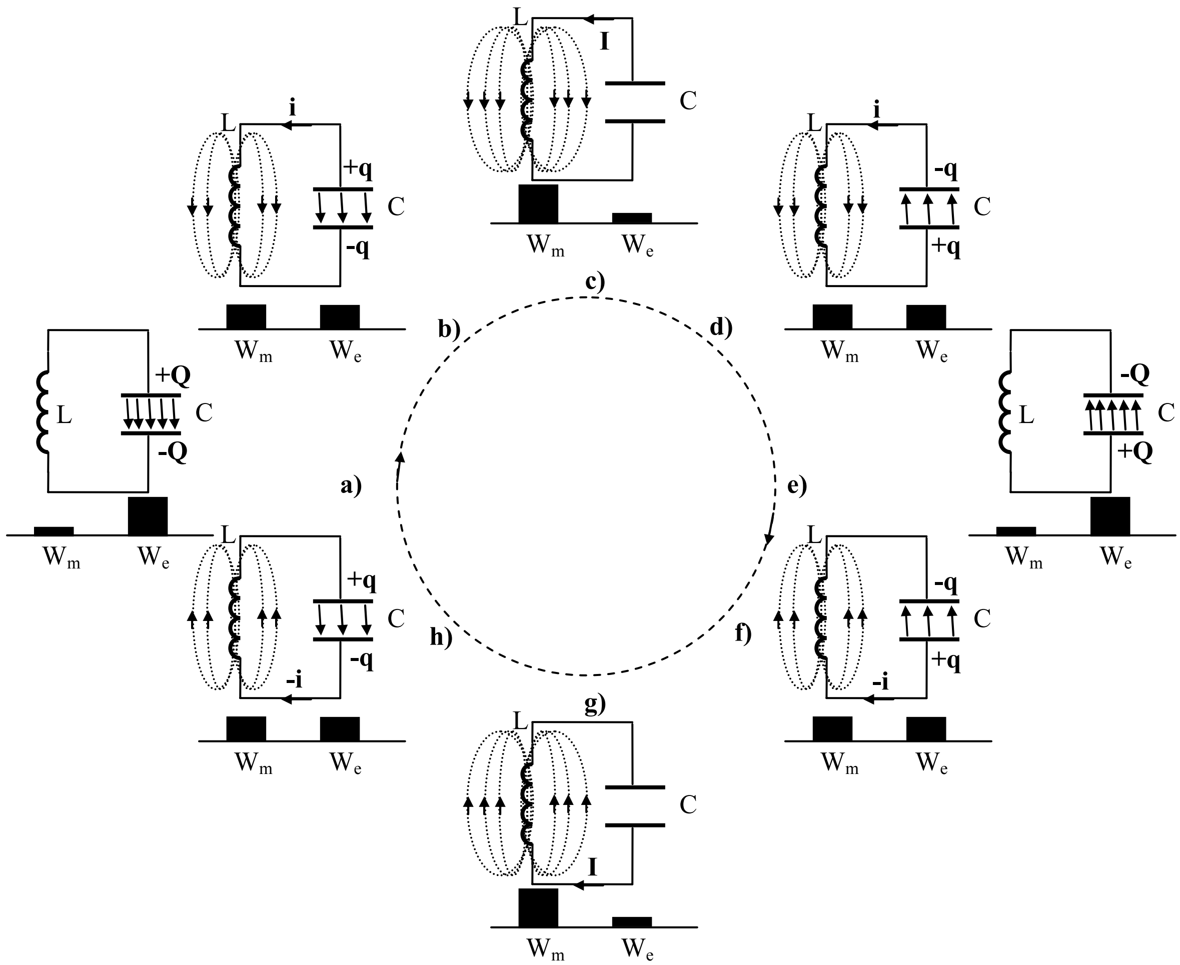


Fig. 2.3

Condensatorul începe să se descarce prin bobină, stabilindu-se astfel un curent în circuit având sensul din figura 2.3b. Bobina acumulează în acest mod energie magnetică, pe seama energiei electrice cedate de condensator. La un moment dat, întreaga energie electrică a condensatorului a fost cedată bobinei, care a transformat-o în energie magnetică (figura 2.3c). Cum în acest moment prin bobină circulă curent, există un flux magnetic, bobina opunându-se variației acestuia. Rezultă că prin circuit curentul va continua să circule în același sens (figura 2.3d), ceea ce va provoca încărcarea condensatorului cu polaritate opusă (energia magnetică a bobinei este cedată condensatorului sub formă de energie electrică). La un moment dat, condensatorul este încărcat complet (figura 2.3e), adică întreaga energie a bobinei a fost transferată condensatorului. Din acest moment, fenomenele se desfăşoară după reprezentările din figura 2.3f…h, adică întocmai ca în figura 2.3a…e, curentul circulând prin circuit (bobină) în sens contrar.

Observație: În momentele în care sarcina pe armăturile condensatorului este nulă, curentul prin circuit nu se anulează (fiind chiar maxim, după cum se poate observa în figurile 2.3c,g), deoarece $i = \frac{dq}{dt}$, adică i este viteza de variație a sarcinii.

După ce sistemul LC ajunge din nou în stadiul din figura 2.3a, procesul se reia întocmai, continuând astfel la infinit în ipoteza unor componente fără pierderi (ideale).

În cazul componentelor reale, există pierderi atât la bobină cât şi la condensator, sub forma unor rezistențe (parazite). Curentul prin circuit produce o disipare de putere pe aceste rezistențe (pierderi prin efect Joule-Lenz), ceea ce va duce în timp la amortizarea oscilațiilor. În acest mod, oscilațiile nu vor avea forma ideală prezentată în figura 2.4a, ci vor fi amortizate, conform figurii 2.4b.

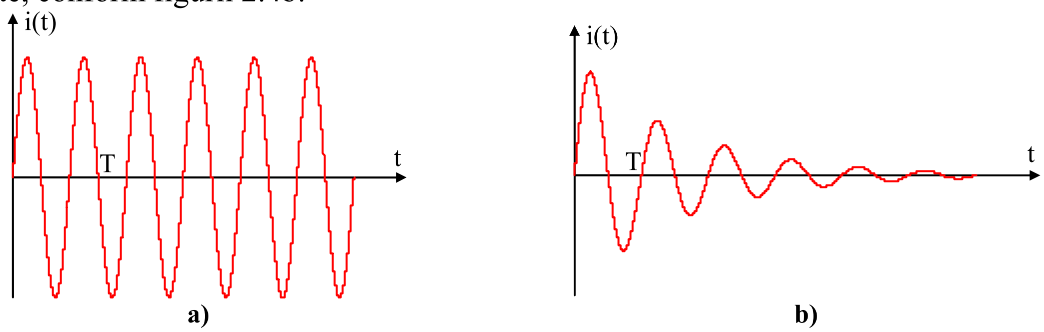


Fig. 2.4

Se poate observa perioada T a oscilațiilor din figura 2.4a, respectiv "pseudoperioada" oscilațiilor din figura 2.4b.

Se poate observa asemănarea între circuitul oscilant LC şi un oscilator mecanic, de exemplu un sistem ce conține o masă m legată de un arc cu constanta de elasticitate k, la care oscilația rezultă din acelaşi transfer energetic de la un corp la altul: energia elastică (potențială) a resortului se transformă în energia (cinetică) a masei şi reciproc, rezultând o mişcare oscilantă ce se desfăşoară până în momentul în care pierderile prin frecare să consume întreaga energie inițială. În tabelul 2.1 se poate observa analogia între cele două oscilații.

Tabelul 2.1

Oscilație mecanică	Oscilație electromagnetică
Energia potențială: $E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$	Energia electrică: $W_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}$
Energia cinetică: $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	Energia magnetică: $W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$
Viteza: $v = \frac{dx}{dt}$	Curentul: $i = \frac{dq}{dt}$

Se pot observa analogiile între sarcina electrică q şi deplasarea x, respectiv între curentul i şi viteza v; de asemenea, între energia potențială şi energia electrică, respectiv între energia cinetică şi energia magnetică, sau analogiile $k \leftrightarrow \frac{1}{C}$, respectiv $m \leftrightarrow L$. Cum pulsația (frecvența) mişcării oscilatorii mecanice este $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \upsilon = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ar trebui ca pulsația (frecvența) oscilației electromagnetice să fie $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$.

Cu ajutorul legii conservării energiei, se poate demonstra corectitudinea acestei afirmaţii.

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 = ct.$$

Rezultă că variaţia acesteia este nulă:

$$0 = \frac{dW}{dt} = \frac{q}{C} \cdot \underbrace{\frac{dq}{dt}}_{i} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow i \cdot \left(L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot q \right) = 0 \Rightarrow L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot q = 0$$

Comparând această ecuaţie cu ecuaţia undei mecanice:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0$$

şi cu expresia corespunzătoare a pulsaţiei, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, rezultă evident că intuiţia referitoare la pulsaţia oscilaţiei electromagnetice este corectă: $\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$. (2.5)

Analogia între sistemul oscilant electromagnetic şi cel mecanic (ambele ideale, adică fără pierderi) este perfectă şi se poate demonstra că asemănarea se menţine şi în cazul sistemelor oscilante reale (cu pierderi sau amortizate), când constanta amortizării mecanice de la sistemul masă-arc devine rezistenţa (de pierderi) a sistemului oscilant LC.

2.2 SISTEME OSCILANTE CU CONSTANTE DISTRUBUITE

În sistemul oscilant LC (masă-arc), energiile electrică (potenţială), respectiv magnetică (cinetică) apar în cele două părţi distincte ale sistemului: condensator (arc), respectiv bobină (masă). Despre astfel de sisteme oscilante se spune că sunt cu constante concentrate. Există şi sisteme oscilante cu constante distribuite. Un exemplu îl poate constitui o cavitate rezonantă acustică, de exemplu un tub de orgă sau de nai, în care cele două forme de energie nu sunt separate în spaţiu, ambele dezvoltându-se în aerul din interiorul cavităţii. Energia cinetică este asociată mişcării aerului în cavitate, iar cea potenţială compresiunii/rarefierii acestuia. Evident, acestea nu pot fi reprezentate decât în întreg volumul cavităţii rezonante.

Într-un mod asemănător se pot produce şi oscilaţii electromagnetice într-un tub închis, cu pereţii din Cu sau alt material conductor. Dacă această cavitate este goală în interior, se pot produce oscilaţii electromagnetice (oscilaţii ale câmpului electric şi magnetic). Rezultă că un astfel de sistem oscilant electromagnetic va fi unul cu constante distribuite.

Ca şi în cazul circuitului LC, oscilaţiile trebuie amorsate. Aceasta se poate face de exemplu cu un magnetron, care este o sursă de oscilaţii electromagnetice de frecvenţă foarte mare. Faptul că între capetele cilindrului există un câmp electric va fi cauza circulaţiei unui curent în pereţii acestuia, curent ce va genera un câmp magnetic (ale cărui linii de câmp se vor închide în cercuri perpendiculare pe axa longitudinală a cilindrului, adică cele două câmpuri sunt ortogonale). Câmpul magnetic variabil induce la rândul său un curent în pereţii cavităţii (cilindrului), adică un câmp electric longitudinal, şi aşa mai departe, procesul continuând la infinit în cazul unui sistem ideal şi fiind evident amortizat în cazul sistemului real.

În fiecare punct din cavitate (volum elementar) energia câmpului electric (mai exact densitatea de energie) este dată de relaţia $w_E = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2$,

iar energia câmpului magnetic de relaţia $w_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_0}$.

În acest mod, ca şi la sistemul LC, energia în cavitatea electromagnetică rezonantă oscilează între cele două câmpuri (electric şi magnetic), dar acestea nu mai sunt separate în acest caz.
Din analiza ecuaţiilor lui Maxwell (1.14), rezultă că oscilaţiile electromagnetice au caracter de undă, adică se propagă în spaţiu. Astfel:

$$\oint_\Gamma \overline{B}\cdot d\overline{l} = \mu\cdot i = -\mu\cdot\varepsilon\cdot\frac{d\Phi_E}{dt} \Leftrightarrow \iint_{\Sigma_\Gamma}\left(rot\overline{B}\right)\cdot d\overline{s} = -\mu\cdot\varepsilon\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_{\Sigma_\Gamma}\overline{E}\cdot d\overline{s}\right)$$

Considerând că variaţiile câmpurilor $\overline{B}$ şi $\overline{E}$ au loc pe o singură direcţie, rezultă ecuaţia:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu\cdot\varepsilon\cdot\frac{\partial E}{\partial t} \tag{2.6}$$

Dar $\oint_\Gamma \overline{E}\cdot d\overline{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_{\Sigma_\Gamma}\overline{B}\cdot d\overline{s}\right) \Leftrightarrow \iint_{\Sigma_\Gamma}\left(rot\overline{E}\right)\cdot d\overline{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_{\Sigma_\Gamma}\overline{B}\cdot d\overline{s}\right)$

În aceeaşi ipoteză a variaţiei unidimensionale, rezultă ecuaţia:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{2.7}$$

Derivând în (2.6) în raport cu t şi ţinând cont şi de (2.7), rezultă ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x\partial t} = -\mu\cdot\varepsilon\cdot\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \underset{(2.7)}{\Longrightarrow} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \mu\cdot\varepsilon\cdot\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \tag{2.8}$$

Asemănător se demonstrează că este valabilă o ecuaţie asemănătoare şi pentru B:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \mu\cdot\varepsilon\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0 \tag{2.9}$$

Comparând ecuaţiile (2.8) sau (2.9) cu ecuaţia undelor: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$, se poate observa similitudinea totală între ele. Rezultă că semnificaţia coeficientului $\mu\cdot\varepsilon$ trebuie să fie cea a inversului pătratului unei viteze, fapt ce va fi probat în continuare:

$$\langle\varepsilon\cdot\mu\rangle_{S.I.} = 1\frac{F}{m}\cdot 1\frac{H}{m} = 1\frac{C\cdot V^{-1}}{m}\cdot 1\frac{Wb\cdot A^{-1}}{m} = 1\frac{A\cdot s\cdot V^{-1}}{m}\cdot 1\frac{V\cdot s\cdot A^{-1}}{m} = 1\frac{s^2}{m^2}$$

Rezultă că $\frac{1}{\varepsilon\cdot\mu} = v^2$

unde v este viteza de propagare a undelor electromagnetice. În vid, valoarea acesteia este:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\cdot\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4\cdot\pi\cdot 9\cdot 10^9}\cdot 4\cdot\pi\cdot 10^{-7}}} = 3\cdot 10^8\,\frac{m}{s} = c \tag{2.10}$$

Aşadar, în vid undele electromagnetice se propagă cu viteza luminii. De la această constatare s-a formulat ipoteza naturii electromagnetice a luminii, ipoteză ce a fost confirmată ulterior.
Este evident că într-un mediu oarecare, undele electromagnetice se propagă cu viteza

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot\mu_0\cdot\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}}$$

Rezolvând ecuaţiile (2.8) şi (2.9) se determină expresiile $E = E(x,t)$, respectiv $B = B(x,t)$, adică poziţia în spaţiu a undei electromagnetice în orice moment de timp:

$$E(t,x) = E_{max}\cdot\sin(k\cdot x - \omega\cdot t);\; B(t,x) = B_{max}\cdot\sin(k\cdot x - \omega\cdot t) \tag{2.11}$$

Ţinând cont de (2.7), rezultă:

$$\omega \cdot B_{max} \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) = k \cdot E_{max} \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \Leftrightarrow \frac{E_{max}}{B_{max}} = \frac{\omega}{k} \qquad (2.12)$$

Dacă se defineşte lungimea de undă (λ) ca spaţiul parcurs de undă pe durata unei perioade T, $\lambda = v \cdot T = \frac{c}{f}$, în (2.11) rezultă că:

$$k \cdot \lambda - \underbrace{\omega \cdot T}_{2\cdot\pi} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \qquad (2.13)$$

Mărimea k se numeşte număr de undă; ţinând cont de (2.13) în (2.11), rezultă:

$$E_{max} = c \cdot B_{max} \underset{(2.11)}{\Leftrightarrow} E(t,x) = c \cdot B(t,x) \qquad (2.14)$$

Una din caracteristicile importante ale oricărui tip de undă este aceea că sunt capabile să transporte energie.

În cazul undelor electromagnetice, energia transportată în unitatea de timp prin unitatea de suprafaţă este descrisă de vectorul lui Poynting:

$$\overline{S} = \overline{E} \times \overline{H} \qquad (2.15)$$

Unitatea de măsură a mărimii S este $\frac{W}{m^2}$, iar direcţia şi sensul vectorului $\overline{S}$ coincid cu direcţia şi sensul de propagare a undei.

Alte expresii ale vectorului Poynting pot fi şi:

$$\overline{S} = \frac{\mu \cdot \varepsilon}{\varepsilon \cdot \mu} \cdot \overline{E} \times \overline{H} = \frac{1}{v^2} \cdot \overline{D} \times \overline{B} = \frac{Z_0^2}{\mu} \cdot \overline{D} \times \overline{H} = \frac{1}{\varepsilon \cdot Z_0^2} \cdot \overline{E} \times \overline{B} \qquad (2.16)$$

în care $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ este impedanţa caracteristică a mediului prin care se propagă unda.

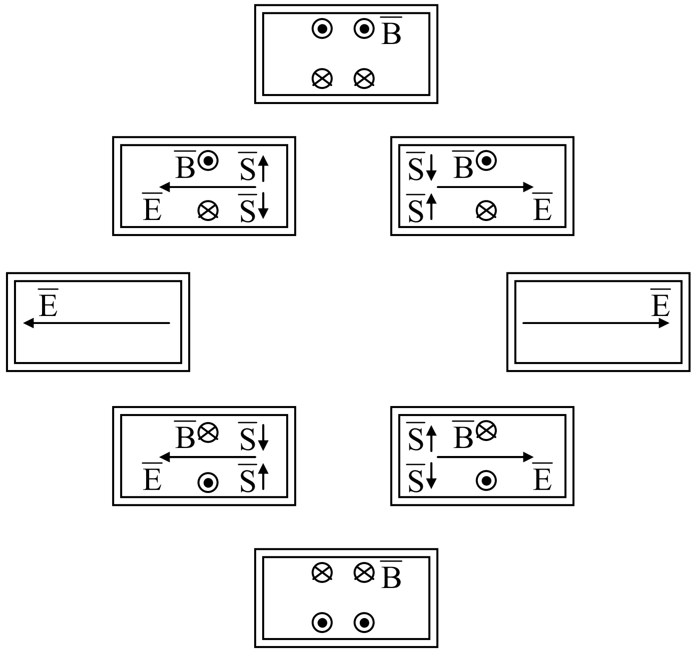
2.3 APLICAŢII

1. Un circuit oscilant LC este format dintr-o bobină cu inductanţa $L = 10mH$ şi capacitatea $C = 1\mu F$, a cărei tensiune iniţială are valoarea $U_{C_0} = 50V$. Să se determine valoarea maximă a curentului prin circuit.

2. Un circuit oscilant LC are capacitatea încărcată iniţial cu sarcina Q. Să se determine valoarea raportului $\frac{q}{Q}$ în momentul în care energiile pe cele două elemente de circuit sunt egale $(W_m = W_e)$, q fiind sarcina pe armăturile condensatorului în acel moment. Care este intervalul de timp necesar producerii acestui fenomen?

3. Analizaţi transportul de energie într-o cavitate electromagnetică rezonantă.

Când energia este înmagazinată doar în câmpul electric, ea este concentrată în lungul axei, aceasta fiind regiunea în care $\overline{E}$ are valoarea maximă; când este înmagazinată complet în câmpul magnetic, ea este concentrată lângă pereţii cavităţii. În figură se văd direcţiile şi sensurile vectorului Poynting $\overline{S} = \frac{1}{\mu} \cdot \overline{E} \times \overline{B}$ în toate situaţiile posibile. Considerând că din punct de vedere geometric cavitatea este un paralelipiped



dreptunghic, fie A aria unei fețe şi dx grosimea (infinitezimală a) unei zone pe care o traversează unda. Rezultă că la un moment dat, energia înmagazinată în regiunea dx este:

$$dw = \left(dw_e + dw_m\right) \cdot A \cdot dx = \left(\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 + \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot B^2\right) \cdot A \cdot dx$$

Ținând cont de (2.14):

$$dw = \left(\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E \cdot (c \cdot B) + \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot B \cdot \left(\frac{E}{c}\right)\right) \cdot A \cdot dx$$

Dar $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c^2 = 1$, astfel că rezultă:

$$dw = \frac{E \cdot B \cdot A}{\mu_0 \cdot c} \cdot dx$$

Această energie se propagă la distanța dx în intervalul de timp $dt = \frac{dx}{c}$, astfel că:

$$dw = \frac{E \cdot B \cdot A}{\mu_0} \cdot dt$$

În acest mod, densitatea de energie pe unitatea de arie şi de timp este:

$$S = \frac{1}{\mu_0} \cdot E \cdot B,$$

adică tocmai modulul vectorului Poynting.

3. PROPAGAREA UNDELOR ELECTROMAGNETICE

3.1 GENERALITĂȚI

Câmpul electromagnetic este consecința câmpurilor variabile electric şi magnetic, care se generează în jurul unui conductor parcurs de un curent (electric) variabil (în timp). În conformitate cu ecuațiile lui Maxwell, în principiu orice corp ce produce câmp electric sau magnetic variabil, poate genera (radia) unde electromagnetice în spațiu, însă radiația va fi eficientă numai dacă sunt îndeplinite şi următoarele condiții:

- Frecvența câmpului (oscilației) este suficient de ridicată;
- Dimensiunile sistemului radiant să fie comparabile cu lungimea de undă.

Undele electromagnetice reprezintă variații (periodice) în timp şi în spațiu ale câmpului electromagnetic. Ele sunt generate în jurul antenelor de emisie, care reprezintă sisteme oscilante deschise şi se propagă în spațiu cu viteza luminii. Sunt caracterizate de o serie de parametri ca: intensitatea, polarizarea, lungimea de undă, etc.

Distanța parcursă în spațiu într-un interval de timp corespunzător unei perioade a oscilației se numeşte lungime de undă (λ). Cum undele electromagnetice se propagă în vid cu viteza luminii, relația dintre lungimea de undă şi frecvență în acest caz este:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{f}\left[\frac{m \cdot s^{-1}}{Hz}\right] = \frac{300}{f\,[MHz]}[m]$$

La distanță mare de antena de emisie, undele electromagnetice sunt plane şi sunt caracterizate de doi vectori: $\overline{E}$, intensitatea câmpului electric, şi $\overline{H}$, intensitatea câmpului magnetic. Aceştia sunt perpendiculari între ei şi, în acelaşi timp, pe direcția de propagare. În figura 3.1 se arată modul de variație în timp a câmpului electromagnetic.

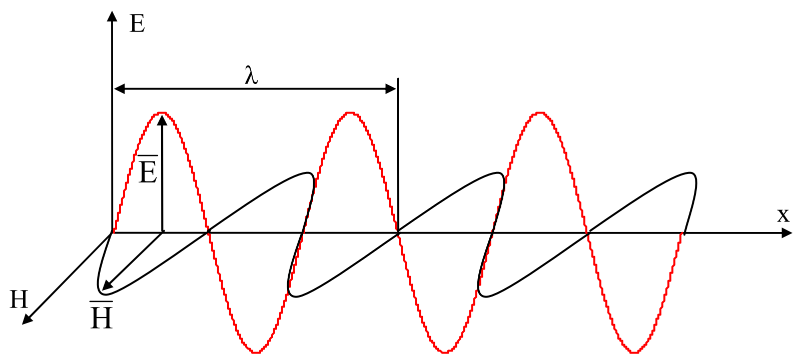


Fig. 3.1

Planul căruia aparține vectorul $\overline{E}$ se numeşte plan de polarizare. Dacă antena radiază un câmp electromagnetic cu vectorul $\overline{E}$ vertical, rezultă unde polarizate vertical. Acestea vor induce o tensiune maximă numai în antenele de recepție cuprinse în plan vertical (adică cuprinse în planul de polarizare şi deci paralele cu vectorul $\overline{E}$). Polarizarea undelor depinde în primul rând de construcția antenelor de emisie şi poate fi orizontală, verticală sau circulară (când vârful vectorului $\overline{E}$ descrie o elice în spațiu). Polarizarea orizontală se foloseşte cu precădere la emisiunile TV, întrucât astfel de unde sunt mai puțin atenuate de suprafața Pământului şi sunt mai puțin reflectate. Intensitatea câmpului electric, care se măsoară în $\left[\frac{V}{m}\right]$, reprezintă în acest context tensiunea indusă de câmpul electromagnetic într-un conductor de 1m, pe care-l intersectează cu viteza luminii.

În propagarea lor, undele electromagnetice sunt supuse fenomenelor de reflexie, refracție, difracție, schimbarea planului de polarizare, etc. Particularitățile propagării depind în primul rând de frecvență. Întâlnind diverse obstacole în propagarea lor, undele electromagnetice induc în acestea curenți electrici; la rândul lor, aceştia generează câmpuri electromagnetice proprii, adică undele reflectate. Reflexia undelor electromagnetice se supune aceloraşi legi ca şi reflexia optică. Corpurile conductoare reflectă undele electromagnetice mai bine decât cele izolatoare.

Reflexia poate avea loc şi la incidența undei cu neuniformitățile din troposferă sau cu straturile ionizate din ionosferă.

Într-un mediu omogen, undele electromagnetice se propagă în linie dreaptă. Întâlnind straturi neomogene în atmosferă, traiectoria undelor se curbează, adică apare reflexia. În anumite condiții meteorologice, este posibil ca, datorită reflexiei, undele radiate în sus să se întoarcă pe Pământ. Pe suprafața solului are loc o nouă reflexie , generându-se astfel o (altă) undă care se poate propaga la distanțe mari.

Anumite obstacole întâlnite pe direcția de propagare pot fi "ocolite" de undele electromagnetice, fenomen ce se numeşte difracție. Explicația fenomenului constă în aceea că suprafața obiectului devine un (nou) generator de unde în toate direcțiile. Difracția este cu atât mai evidentă cu cât obiectul are dimensiunile mai apropiate de lungimea de undă. De exemplu, undele de difracție se pot obține la suprafața (sferică) a Pământului – pentru undele lungi, sau pe culmile munților, în cazul undelor ultrascurte.

La propagarea undelor electromagnetice, o mare influență o au starea şi structura atmosferei. Din punctul de vedere al structurii sale, atmosfera este împărțită în trei grupe:

- Troposfera, a cărei limită superioară este de cca. 10 – 12km;
- Stratosfera, a cărei limită superioară este de cca. 60 – 80km;
- Ionosfera.

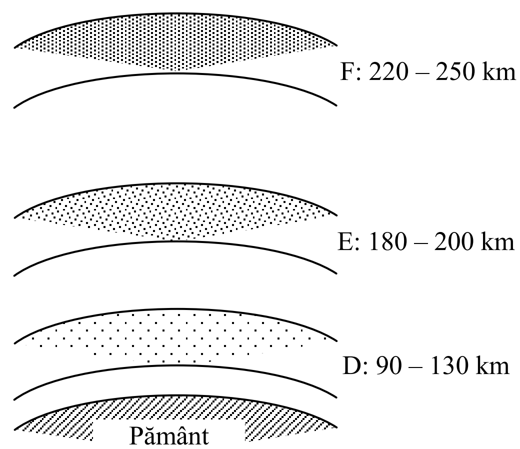


Fig. 3.2

Ceea ce caracterizează ionosfera este o cantitate (densitate) mică a gazelor şi una mare de ioni şi electroni liberi, ce se formează în urma acțiunii razelor solare ultraviolete asupra moleculelor de gaz.

Ionosfera este compusă din câteva straturi cu concentrații mari de ioni, deci cu proprietăți bune în privința conductivității electrice, astfel că undele electromagnetice ce ajung acolo vor fi reflectate. Aceste straturi au fost notate D, E şi F în figura 3.2.

Gradul de ionizare al acestor straturi depinde de radiația solară, modificându-se în consecință de la un anotimp la altul, de la noapte la zi, sau chiar de la o oră la alta.

Mărimea energiei electromagnetice reflectată de la straturile ionizate depinde de frecvența undelor, de starea atmosferei şi de unghiul de incidență.

Undele electromagnetice se pot clasifica după traseele de propagare, astfel (figura 3.3):

- undele de suprafață, care ajung la punctul de recepție propagându-se la suprafața Pământului;
- undele spațiale, care ajung la punctul de recepție după ce sunt reflectate de troposferă sau ionosferă.

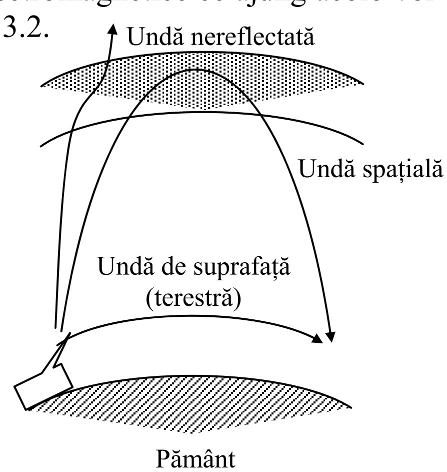


Fig. 3.3

3.2 SPECTRUL ELECTROMAGNETIC

Câmpul electromagnetic este un câmp rotational şi se propagă în spaţiu sub forma undelor electromagnetice, cu o viteză care depinde de pemitivitatea dielectrică şi permeabilitatea magnetică a mediului considerat. Frecvenţa undelor obţinute este egală cu frecvenţa cu care se deplasează electronii. Cu cât este mai mare frecvenţa, cu atât o cantitate mai mare de energie este transportată în acelaşi interval de timp. Lungimea de undă a undelor electromagnetice variază într-un interval foarte larg. Astfel, în telecomunicaţii se folosesc unde electromagnetice ale căror lungimi de undă pot ajunge la valori de ordinul kilometrilor, pe când lungimile de undă ale radiaţiilor gamma emise de unele elemente radioactive au valori de ordinul $10^{-10}\,\mathrm{m}\left(1\overset{\circ}{\mathrm{A}}\right)$. Undele (radiaţiile) electromagnetice au fost prezise teoretic de ecuaţiile lui Maxwell şi apoi descoperite (confirmate) experimental de Heinrich Hertz. Ele se propagă în aer cu viteza luminii $\left(c = 3\cdot10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 300000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right)$, aproximativ egală cu viteza lor de propagare în vid. Conform acestei teorii, emise de J. C. Maxwell in 1865, lumina şi radiaţiile asemănătoare (radiaţiile infraroşii, ultraviolete, etc) sunt tot de natură electromagnetică, diferind între ele prin lungimile de undă. Informaţia se recepţioneaza la distanţă prin radio, televiziune, telefonie mobilă. Purtătorii informaţiei sunt undele electromagnetice de frecvenţă ridicată, modulate de undele de joasă frecvenţă care conţin informaţia. Undele electromagnetice emise de antenele de emisie se refractă, se difractă, interferează şi sunt atenuate până ajung la antena receptorului. În figura 3.4 se prezintă spectrul electromagnetic, indicându-se atât domeniul frecvenţelor, cât şi cel al lungimilor de undă.

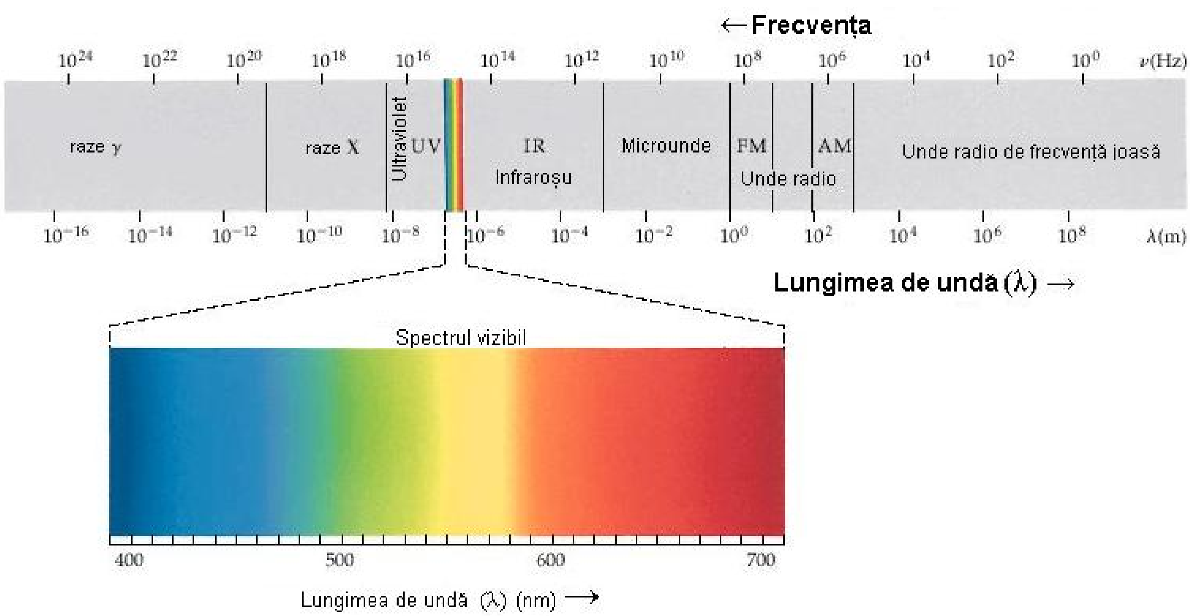


Figura 3.4

În funcţie de frecvenţa sau lungimea de undă cu care unda (radiaţia) electromagnetică se repetă în timp, respectiv în spaţiu, undele electromagnetice se pot manifesta în diverse forme.
Spectrul radiaţiilor electromagnetice este împărţit după criteriul lungimii de undă în câteva domenii, de la frecvenţele joase spre cele înalte:

- radiațiile (undele) herziene, care se subîmpart în trei categorii:
  - unde radio de joasă frecvență;
  - unde radio;
  - microunde;
- radiații infraroşii;
- radiații luminoase (sau spectrul vizibil);
- radiații ultraviolete;
- radiații X (Röntgen);
- radiații "γ".

Undele radio se folosesc în general pentru comunicații (transmiterea semnalelor radio/TV, comunicații prin satelit şi telefonie mobilă).

Microundele sunt folosite atât în comunicații, cât şi în altfel de aplicații, ca de exemplu cuptorul cu microunde, a cărui funcționare se bazează pe absorbția relativ puternică a radiațiilor cu aceste frecvențe în apă sau materiile de natură vegetală şi animală.

Radiația ("lumina") **infraroşie** este foarte utilă în aplicațiile din domeniul termoviziunii sau al detectoarelor de fum (incendiu), deoarece corpurile calde au proprietatea de a emite raze infraroşii. Ele se obțin prin oscilațiile moleculelor, atomilor şi ionilor (adică mişcarea de agitație termică favorizează producerea razelor IR), iar amplitudinile lor depind de temperatura corpurilor şi de tranzițiile electronilor către învelişurile interioare ale atomilor, cu nivele energetice superioare. Radiațiile IR sunt şi una din cele trei categorii în care sunt împărțite radiațiile solare (radiațiile infraroşii, lumina vizibilă şi radiațiile ultraviolete). Sunt puternic absorbite de apă sau de alte substanțe, producând astfel încălzirea acestora. Şi corpul uman absoarbe aceste raze, percepându-le ca şi căldură. Radiațiile sunt folosite în diferite procese de încălzire şi uscare, în construirea detectoarelor cu "lumină" infraroşie, pentru reținerea pozelor pe filme sensibile la lumina infraroşie, la fotocopiatoare termice, în analize fizico-chimice prin spectroscopie, sau pentru transmiterea de date fără fir la distanțe mici, aşa cum este cazul la aproape toate telecomenzile pentru televizoare şi alte aparate (electro)casnice.

Undele milimetrice se folosesc de exemplu în astronomie.

Undele terahertziene au început abia de curând să fie cercetate şi folosite în aplicații practice.

Radiațiile vizibile sunt singurele percepute de ochiul uman. Ele sunt emise de Soare, stele, lămpi cu filamente incandescente a căror temperatură poate să atingă 2000 - 3000˚C, tuburi cu descărcări în gaze, arcuri electrice. Emisia de lumină se mai poate obține şi în urma tranzițiilor electronilor pe nivele energetice inferioare atomilor. Lumina vizibilă este cel mai comun exemplu de unde electromagnetice.

Radiațiile ultraviolete sunt emise de Soare, stele, corpuri încălzite puternic şi vaporii de mercur din tuburi de sticla specială de cuarț (care nu absoarbe acest tip de radiații). Radiațiile conținute în lumina solară se absorb în mare parte în stratul superior al atmosferei (stratul de ozon). Cu cât altitudinea creşte, cu atât creşte şi nivelul radiațiilor ultraviolete. Acestea duc la schimbări la nivelul pielii: pigmentare, ardere, cancer. Lumina ultravioletă încurajează formarea vitaminei D şi distruge bacteriile. Este de asemenea utilă în dermatologie, la iluminatul fluorescent şi la instalații de numerotare în industrie. Radiațiile se obțin în urma tranzițiilor electronilor de pe nivele cu energii mari pe nivele cu energii mici.

Radiatiile X (sau **Röntgen**) sunt emise în tuburi speciale, numite Röntgen, în care sunt electronii sunt accelerați în câmpuri electrice intense, astfel încât aceştia pătrund în interiorul învelişurilor electronice ale atomilor anodului sau gazului din tub şi smulg electroni din straturile de lânga nuclee. În urma frânării acestor electroni şi în urma tranzițiilor ulterioare ale electronilor de pe nivele cu energii mici (straturile K,L), se obțin razele X.

Au frecvențe mari şi sunt folosite pentru realizarea radiografiilor medicale, deoarece sunt absorbite diferit de muşchi şi de oase, impresionând astfel plăcile fotografice.
Tot în domeniul medicinii, razele X sunt folosite şi în scopuri terapeutice, deoarece ajută la combaterea dezvoltării țesuturilor celulare bolnave (tumorilor). Produc fluorescența unor substante. Radiatiile Röntgen sunt utile şi în descoperirea falsurilor în artă.

Fantele cu lărgimi $d \approx 10^{-12}\,m$, comparabile cu distanțele interatomice din solide, produc difracția razelor X. Forma figurilor de difracție este folosită în determinarea geometriei structurilor cristaline.

Radiațiile cosmice si **radiațiile** γ sunt emise în procesele de dezintegrare nucleară, în reacțiile nucleare din Soare, stele (acestea sunt absorbite de atmosferă), dar şi în reactoarele nucleare terestre. Sunt cele mai penetrante, având frecvențele şi energiile cele mai mari. Ca utilizări, sunt folosite în defectoscopie, pentru sterilizare şi în medicină (tratarea cancerului).

3.3 APLICAȚII

4. DOMENII ALE SPECTRULUI ELECTROMAGNETIC

4.1 DOMENIUL DE RADIOFRECVENȚĂ

În radiocomunicații este utilizat un domeniu larg de frecvențe, aproximativ $(0;300\,\mathrm{GHz})$, sau, echivalent, $\lambda > 1\mathrm{mm}$. Acesta este împărțit în mai multe subdomenii, în funcție de lungimea de undă. Fiecare domeniu se utilizează pentru diferite aplicații şi tehnologii de transmisii radio. Spectrul de radiofrecvență (RF) este de obicei supus unor reguli specifice fiecărei țări şi în general este vândut sau închiriat unor deținători licențiați de sisteme de transmisii radio (de exemplu, operatori de telefonie mobilă sau stații TV). Spectrul de RF este împărțit în următoarele domenii:

- Extrem de joasă frecvență (ELF): $\lambda = 10000 \div 100000\mathrm{km}$ $(f = 3 \div 30\mathrm{Hz})$. Se foloseşte pentru comunicațiile cu submarinele la foarte mare adâncime.
- Super joasă frecvență (SLF): $\lambda = 1000 \div 10000\mathrm{km}$ $(f = 30 \div 300\mathrm{Hz})$. Se foloseşte pentru comunicarea cu submarinele; frecvența c.a. industrial (50/60 Hz).
- Ultra joasă frecvență (ULF): $\lambda = 100 \div 1000\mathrm{km}$ $(f = 300 \div 3000\mathrm{Hz})$. Se foloseşte pentru comunicații în interiorul minelor.
- Foarte joasă frecvență (VLF): $\lambda = 10 \div 100\mathrm{km}$ $(f = 3 \div 30\mathrm{kHz})$. Se foloseşte pentru comunicarea cu submarinele aflate în vecinătatea suprafeței apei, avalanche beacons, monitoare cardiace wireless, sau în geofizică.
- Joasă frecvență (JF) sau undele lungi (UL sau LW): $\lambda = 1 \div 10\mathrm{km}$ $(f = 30 \div 300\,\mathrm{kHz})$. Datorită lungimilor de undă mari, prezintă bune proprietăți de difracție, astfel încât pot "ocoli" practic orice obstacole, putând astfel înconjura suprafața Pământului. Sunt cu precădere unde de suprafață, dar se pot propaga şi prin reflexie ionosferică, cu precădere straturile D şi E având suficienți ioni pentru a le reflecta. De asemenea, apele mărilor sau solul (eventual umed) constituie medii (conductoare) de reflexie pentru aceste unde, indiferent de unghiul lor de incidență. Rezultă că legăturile realizate sunt stabile (indiferent de anotimp), dar necesită puteri foarte mari la emisie, ceea ce constituie un impediment major în utilizarea lor.
- Medie frecvență (MF) sau undele medii (UM sau MW): $\lambda = 0{,}1 - 1\mathrm{km}$ $(f = 300 \div 3000\,\mathrm{kHz})$. Comparativ cu undele lungi, pătrund mai adânc în ionosferă. În timpul zilei, stratul E al ionosferei le atenuează puternic, iar noaptea sunt reflectate, cel puțin parțial. Din acest motiv, UM sunt unde de suprafață în timpul zilei, noaptea fiind atât unde spațiale cât şi de suprafață. Din acest motiv, în timpul nopții se pot realiza legături la distanțe foarte mari.
- Înaltă frecvență (HF) sau undele scurte (US sau SW): $\lambda = 10 - 100\mathrm{m}$ $(f = 3 \div 30\,\mathrm{MHz})$.

  Cum atenuarea undelor la suprafața Pământului se măreşte odată cu creşterea frecvenței (sau, echivalent, cu micşorarea lungimii de undă), rezultă că US sunt caracterizate de o foarte mică zonă de propagare ca unde de suprafață.

  Modul principal de propagare al US îl constituie undele spațiale (rezultate prin reflexie ionosferică), ceea ce asigură posibilitatea stabilirii unor legături la distanțe foarte mari, cu puteri de emisie rezonabile.

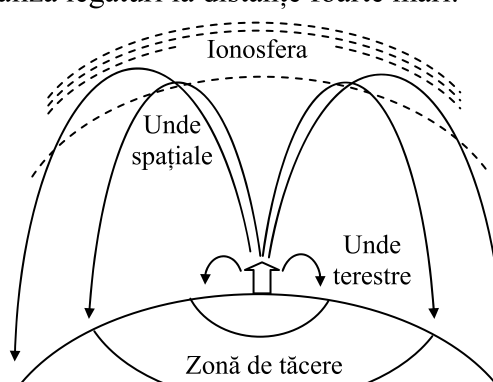


Fig. 4.1

Deoarece structura ionosferei se modifică în permanenţă, fiecare emiţător pe US trebuie să fie capabil să funcţioneze pe mai multe frecvenţe,diferite care se repartizează folosind grafice speciale şi studii de prognoză.
Noaptea se foloseşte cu precădere partea inferioară a gamei (40 – 75m), iar ziua partea superioară (11 – 41 m). Datorită faptului că la punctul de recepţie apar unde ce au urmat trasee diferite, precum şi mişcării continue a straturilor ionizate ale ionosferei, apare fenomenul de fading, adică o variaţie aleatoare a intensităţii semnalului recepţionat. De asemenea, la o anumită distanţă de emiţător apare o „zonă de tăcere" (silence zone), în care nu se recepţionează nici undele de suprafaţă, nici cele spaţiale, aşa cum este ilustrat în figura 4.1.

- Foarte înaltă frecvenţă (VHF) sau undele ultrascurte (UUS sau USW): $\lambda = 1 - 10\mathrm{m}\left(f = 30 \div 300\,\mathrm{MHz}\right)$. Acestea nu sunt reflectate de ionosferă, pierzându-se astfel în spaţiu. Din acest motiv, legăturile pe UUS se realizează prin unde terestre. Există unele asemănări între UUS şi undele luminoase (vizibile): se difractă puţin, legături stabile stabilindu-se astfel numai în limita vizibilităţii directe. Aceasta se determină aproximând Pământul cu o sferă cu raza de 6370km (figura 4.2). Se obţine:

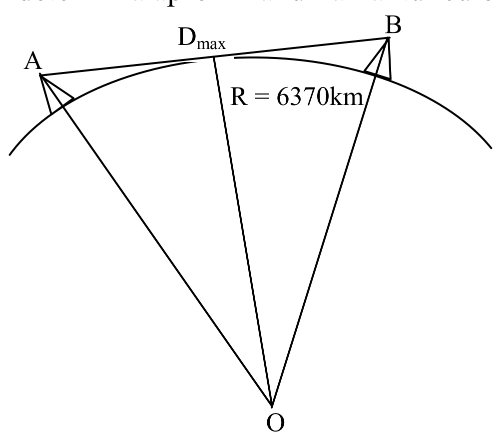


Fig. 4.2

$$D_{max} = 3{,}57 \cdot \left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right)[\mathrm{km}] \quad (4.1)$$

unde h_1 şi h_2 [m] reprezintă înălţimile celor două antene: de emisie şi de recepţie. În troposfera normală, apare totuşi o mică difracţie, ceea ce face ca distanţa dată de (4.1) să se mărească întrucâtva:

$$D_{max} = 4{,}12 \cdot \left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right)[\mathrm{km}] \quad (4.2)$$

În unele condiţii de presiune, temperatură şi umiditate, neuniformităţile din troposferă pot reflecta UUS, astfel încât în acele condiţii distanţa de propagare poate creşte mult, putând ajunge chiar la valori de ordinal miilor de km.

Se folosesc în transmisiuni radio cu modulaţie de frecvenţă (FM), transmisiuni TV, PMR (Professional Mobile Radio – la Taxi de exemplu), transmisiuni video digitale terestre, imagistică cu rezonanţă magnetică.

- Ultra înaltă frecvenţă: $\lambda = 10 - 100\mathrm{cm}\left(f = 300 \div 3000\,\mathrm{MHz}\right)$. Se folosesc în transmisiuni TV, PMR, cuptoare cu microunde, GPS, comunicaţii telefonice mobile (GSM, Universal Mobile Telecomunication System 3G, High Speed Downlink Packet Access 3,5G), telefoane cordless (DECT), WLAN (Wi-Fi 802.11 b/g/n), Bluetooth.
- Superînaltă frecvenţă (SHF): $\lambda = 1 - 10\mathrm{cm}\left(f = 3 \div 30\,\mathrm{GHz}\right)$: TV satelit, WLAN (Wi-Fi 802.11 a/n), dispozitive de microunde, WiMAX (Worldwide Interoperability for Microwave Access – un protocol pentru acces fix sau mobil la Internet), radare.
- Extrem de înaltă frecvenţă (EHF): $\lambda = 1 - 10\mathrm{mm}\left(f = 30 \div 300\,\mathrm{GHz}\right)$. Se folosesc la legături inter-satelit, dispozitive de microunde, WiMAX, radare de înaltă rezoluţie, arme cu energie direcţionată (Sisteme de apărare active, de exemplu sistemele antirachetă), scanere cu unde milimetrice.

La frecvenţe mai mari de 300 GHz, absorbţia radiaţiei electromagnetice de către atmosfera terestră este atât de pronunţată încât aceasta devine practic opacă, pentru a redeveni transparentă pentru domeniul frecvenţelor din spectrele de infraroşu şi vizibil.

O bandă este o mică parte a spectrului frecvenţelor de radiocomunicaţii, în care canalele sunt folosite de obicei în acelaşi scop.
Pentru a preveni interferenţele şi în general pentru o utilizare eficientă a spectrului de RF, fiecărui serviciu îi este alocată o bandă. De exemplu, radiocomunicaţiilor, radiotelefoanelor sau comunicaţiilor folosite la navigaţie li se alocă domenii de frecvenţă disjuncte (care nu se suprapun).
Fiecare din aceste domenii (benzi) are un regulament care stabileşte cum va fi folosită sau partajată, pentru a se evita interferenţele şi pentru a se stabili protocoale de compatibilitate între emiţătorii şi receptorii informaţiilor.

4.2 DOMENIUL INFRAROŞU

„Lumina" infraroşie (IR) este o radiaţie electromagnetică cu lungimea de undă superioară celei a luminii vizibile, începând cu pragul nominal de vizibilitate a culorii roşii ($700\text{nm} = 0{,}7\mu\text{m}$), şi extinzându-se convenţional până la $300\mu\text{m}$. Aceste lungimi de undă corespund unui domeniu de frecvenţă aproximativ între $1...430\,\text{THz}$ şi include cele mai multe dintre radiaţiile termice emise de obiectele aflate la temperatura ambiantă. Microscopic, radiaţia IR este emisă sau absorbită de molecule atunci când apar modificări în mişcarea lor de rotaţie/vibraţie.
Lumina solară la zenit produce o iradiere de cca. 1 kW/m^2, din care 527W reprezintă radiaţie infraroşie, 445W sunt datoraţi luminii vizibile şi 32W reprezintă contribuţia radiaţiei ultraviolete.
Corpul omenesc la temperatură normală emite radiaţii infraroşii cu lungimea de undă în jurul valorii de $12\mu\text{m}$.
La nivel atomic, energia infraroşie provoacă o mişcare de vibraţie a moleculelor printr-o schimbare a momentului magnetic al dipolului, ceea ce produce un domeniu de frecvenţe extrem de util pentru studiul nivelelor acestor energii moleculelare. Spectrografia cu raze IR se bazează pe studiul frecvenţei şi intensităţii fluxului de fotoni (absorbiţi sau cedaţi) de corpul supus analizei.
Imagistica în infraroşu este larg utilizată, atât în scopuri civile cât şi militare.
Aplicaţiile militare sunt în domeniul supravegherii, descoperirii/recunoaşterii ţintelor, urmăririi ţintelor/ghidării rachetelor către ţintă, sau vederii nocturne ("night vision"). Aplicaţiile civile includ senzori termici fără contact, comunicaţii wireless la distanţe mici (telecomenzi), spectroscopie şi în previziunile meteorologice. Astronomia IR foloseşte telescoape echipate cu senzori IR pentru a penetra regiuni neclare (ca de exemplu nori moleculari), sau detectează diverse obiecte în spaţiu (chiar şi planete), ori vizualizează obiecte (cosmice) datând de la începuturile Universului, având spectrul puternic deplasat faţă de roşu.
Orice obiect emite o radiaţie infraroşie, dar în general numai o parte a acestui spectru este de interes, deoarece senzorii sesizează radiaţia numai în interiorul unei anumite zone a benzii. Din acest motiv, spectrul IR este subdivizat în mai multe părţi mai mici.
Comisia Internaţională a Iluminării (The International Commission on Illumination - CIE) recomandă divizarea spectrului IR în următoarele trei benzi:

- IR-A (IR apropiat): $700\text{nm}...1400\text{nm}\,(0{,}7\mu\text{m}...1{,}4\mu\text{m})$.
- IR-B: 1400 nm–3000 nm (1.4 µm – 3 µm)
- IR-C: 3000 nm–1 mm (3 µm – 1000 µm)

Domeniul IR apropiat (NIR – near infrared, IR-A) este definit de absorbţia (radiaţiei) în apă şi are aplicaţii cu precădere în domeniul comunicaţiilor prin fibre optice (datorită nivelului redus al atenuării în SiO_2 - silica) sau în domeniul unor aplicaţii în imagistică, ca de exemplu dispozitive "night vision" sau ochelari de acest tip.

Domeniul IR cu lungime mică de undă (SWIR - Short-wavelength infrared, IR-B) are aplicații în domeniul telecomunicațiilor la mare distanță, cu precădere în domeniul $1{,}53...1{,}56\mu m$.

Datorită naturii aplicațiilor sale, domeniul IR-C se subîmparte în mod obişnuit în trei subdomenii:

- Domeniul IR intermediar (MWIR - Mid-wavelength infrared, IR-C): $\lambda = 3...8\mu m$. În tehnologia rachetelor dirijate, această porțiune a spectrului este „banda atmosferică” în care lucrează capetele de ghidare ale rachetelor IR pasive (passive IR 'heat seeking' missiles). De obicei, aceste rachete se ghidează după jetul de gaze de evacuate de turboreactoare.
- Domeniul IR cu lungime mare de undă (LWIR - Long-wavelength infrared, IR-C): $\lambda = 8...15\mu m$, este regiunea de termoviziune ("thermal imaging" region), în care lucrează senzorii care pot obține o imagine pasivă completă a unui obiect, bazată exclusiv pe emisiile sale termice, fără a fi nevoie de surse externe de lumină sau căldură (soare sau un alt “iluminator” IR). De asemenea, acesta este şi domeniul în care lucrează dispozitivele FLIR (Forward-looking infrared) – camerele de filmare IR sau dispozitivele de termografie.
- Domeniul IR îndepărtat (FIR - Far infrared, IR-C): $\lambda = 15...1000\mu m$ are aplicații în domeniul laserilor.

5. ANALIZA SPECTRALĂ A SEMNALELOR PERIODICE

5.1 CARACTERISTICI GENERALE ALE SEMNALELOR

În telecomunicaţii semnalele sunt mărimi fizice cu ajutorul cărora se transmit mesaje. Clasa semnalelor ce se transmit este foarte largă, în practică întâlnindu-se o varietate foarte mare de semnale.

Din punctul de vedere al posibilităţii de a caracteriza prin funcţii de timp evoluţia unui semnal, acestea se pot clasifica în două grupe:

- Semnale deterministe, care pot fi exprimate prin funcţii analitice de timp cu un număr finit de parametri.
- Semnale aleatoare, care nu pot fi exprimate prin funcţii analitice de timp cu un număr finit de parametri, ci prin funcţii aleatoare. Prin aprecieri probabilistice se pot determina posibilităţile de evoluţie.

Analiza semnalelor stabileşte posibilităţile de a reprezenta semnalele prin sume discrete sau continue de funcţii elementare (exponenţiale, sinusoidale, treaptă unitate ...).

Observaţie:

Această reprezentare matematică este utilă pentru următoarele scopuri practice:

1) Determinarea intervalului de frecvenţe (banda de frecvenţă) ce trebuie alocat canalului de telecomunicaţii destinat transmiterii semnalului;
2) Determinarea răspunsului circuitelor liniare la un semnal dat. Aceasta se realizează prin determinarea răspunsului circuitului analizat la un semnal elementar şi apoi, aplicând principiul superpoziţiei, se determină răspunsul circuitului la suma semnalelor elementare ce compun semnalul dat.

Analiza semnalelor se simplifică dacă funcţiile de timp prin care se exprimă au unele proprietăţi:

1) periodicitatea;
2) simetria;
3) continuitatea;

5.2. TIPURI DE SEMNALE ELECTRICE; PARAMETRII SEMNALELOR

Din întreaga diversitate de semnale electrice se prezintă în mod mai amănunţit doar câteva. Semnalele vor fi prezentate sub formă analitică şi grafică, punând în evidenţă parametrii electrici ai acestora.

5.2.1. Semnale periodice

5.2.1.1. Semnale sinusoidale (cosinusoidale)

Expresia analitică a semnalului este:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{5.1}$$

Considerând că (5.1) descrie un semnal electric (tensiune sau curent), parametrii ce-l definesc sunt următorii:

- A [V] sau [A] – amplitudinea semnalului;
  <u>Observaţie</u>:
  Valoarea efectivă a semnalului are expresia:
  $$A_{ef} = \frac{\sqrt{2}}{2}A \approx 0.707\,A \tag{5.2}$$
- ω_0 [rad/s] – pulsaţia;
  Cum $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$ se pot pune în evidenţă alţi doi parametri:
- f [Hz] – frecvenţa semnalului; (5.3)
- T [s] – perioada semnalului (5.4)

Observaţie: $f = \dfrac{1}{T}$ (5.5)

- φ_0 [rad] – faza iniţială. (5.6)

Conform relaţiilor (5.2)… (5.6), expresia analitică (5.1.) a semnalului sinusoidal are forma:

$$x(t) = \sqrt{2}\,A_{ef}\sin(2\pi f\,t + \varphi_0) = \sqrt{2}\,A_{ef}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) \quad (5.7)$$

Forma de undă a unui astfel de semnal este (re)prezentată în figura 5.1.

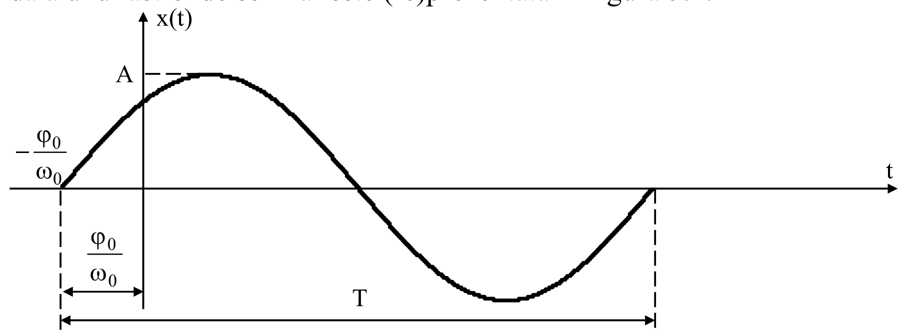


Fig. 5.1: Forma de undă a unui semnal sinusoidal (cosinusoidal)

5.2.1.2. Semnale dreptunghiulare

Expresia analitică a semnalului este:

$$x(t) = \begin{cases} X_p & t_1 < t < t_2 \\ X_n & 0 < t < t_1\ ;\ t_2 < t < T \end{cases} \quad (5.8)$$

Forma de undă a semnalului (5.8) este (re)prezentată în figura 5.2.

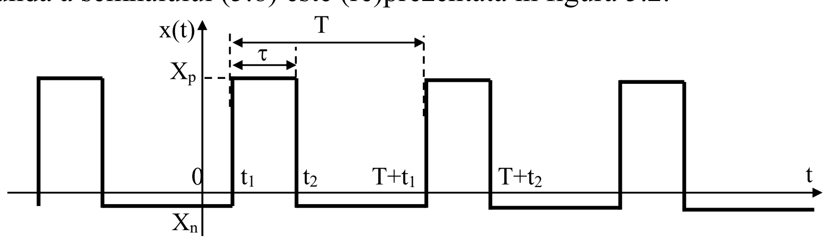


Fig. 5.2: Semnalul periodic dreptunghiular

Parametrii electrici ai semnalului periodic dreptunghiular sunt următorii:

- X_p, X_n [V] sau [A] – nivelele între care evoluează semnalul; există două cazuri particulare importante:
  - o $X_n = 0$ sau $X_p = 0$ (impuls pozitiv, respectiv negativ);
  - o $X_n = -X_p$ (impuls simetric);
- T [s] – perioada semnalului;
- $\tau = t_2 - t_1$ [s] – durata impulsului; (5.8)
- $q = \dfrac{\tau}{T}$ – factorul de umplere al semnalului. (5.9)

Observaţie:

Factorul de umplere al unui semnal periodic dreptunghiular are o valoare subunitară:

$$0 < q < 1 \quad (5.10)$$

În cazul unui semnal periodic dreptunghiular se pune în evidenţă componenta continuă a acestuia, definită ca înălţimea dreptunghiului cu “aria” egală cu cea de sub reprezentarea grafică a semnalului pe o perioadă (aria este pozitivă, iar “aria” are semn, “+” sau “–”):

$$X_{CC} = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_{t_1}^{t_2} X_p\,dt + \int_{t_2}^{t_1+T} X_n\,dt\right) = \frac{\tau}{T}(X_p - X_n) + X_n \quad (5.11)$$

5.2.2. Semnale neperiodice

Se prezintă expresiile matematice şi formele de undă a două impulsuri des utilizate în telecomunicaţii.

5.2.2.1. Impulsul video

Expresia analitică a semnalului este:

$$x_v(t) = \begin{cases} A & t_1 < t < t_2 \\ 0 & t \notin (t_1, t_2) \end{cases} \tag{5.12}$$

Forma de undă a semnalului este prezentată în figura 5.3.

Parametrii electrici ai impulsului video sunt următorii:

- A [V] sau [A] – amplitudinea semnalului;
- $\tau = t_2 - t_1$ [s] – durata impulsului.

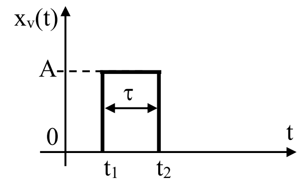


Fig. 5.3: Impulsul video

5.2.2.2. Impulsul radio

Expresia analitică a semnalului este:

$$x_r(t) = \begin{cases} A\cos(\omega_0 t) & t_1 < t < t_2 \\ 0 & t \notin (t_1, t_2) \end{cases} \tag{5.13}$$

Observaţie:

Se poate scrie că:

$$x_r(t) = x_v(t)\cos(\Omega_0 t) \tag{5.14}$$

unde $x_v(t)$ este impulsul video.

Parametrii electrici ai impulsului radio sunt următorii:

- A [V] sau [A] – amplitudinea semnalului;
- $\tau = t_2 - t_1$ [s] – durata impulsului;
- ω_0 - pulsaţia semnalului periodic sinusoidal (cosinusoidal) ce intră în componenţa impulsului radio.

Observaţie:

Se poate pune în evidenţă perioada T_0, respectiv frecvenţa f_0 a semnalului periodic sinusoidal (cosinusoidal) ce intră în componenţa impulsului radio, astfel:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0 \; ; \; T_0 << \tau$$

Impulsul radio se obţine prin “decuparea” unei durate finite τ a unui semnal periodic sinusoidal (cosinusoidal).

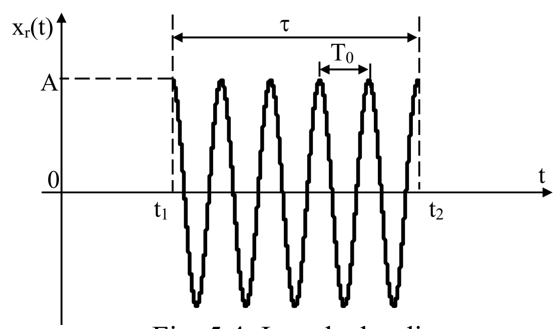


Fig. 5.4: Impulsul radio

Forma de undă a unui impuls radio (cosinusoidal) este prezentată în figura 5.4.

5.3. REPREZENTAREA SEMNALELOR ÎN DOMENIUL TIMP ŞI ÎN DOMENIUL FRECVENŢĂ

Orice semnal x(t) poate fi caracterizat prin două reprezentări:

- reprezentarea în domeniul timp;
- reprezentarea în domeniul frecvenţă;

Aceste reprezentări mai sunt denumite în mod curent:

- forma de undă a semnalului;
- spectrul de frecvenţe al semnalului;

Oricare din aceste două reprezentări caracterizează în mod univoc semnalul, adică unei reprezentări în domeniul timp îi corespunde o singură reprezentare în domeniul frecvenţă şi invers, unei reprezentări în frecvenţă îi corespunde o singură reprezentare în timp.

Observaţii:
- În cazul semnalelor periodice trecerea de la o reprezentare la alta se obţine cu ajutorul seriilor Fourier.
- În cazul semnalelor neperiodice trecerea de la o reprezentare la alta se obţine cu ajutorul transformatei Fourier sau Laplace.

5.3.1. Reprezentarea în domeniul timp şi frecvenţă a unui semnal sinusoidal

Expresia analitică a semnalului este

$$x(t)=A_0 \sin(\omega_0 t+\varphi_0) \tag{5.15}$$

Reprezentarea în domeniul timp se obţine considerând ca variabilă independentă timpul.

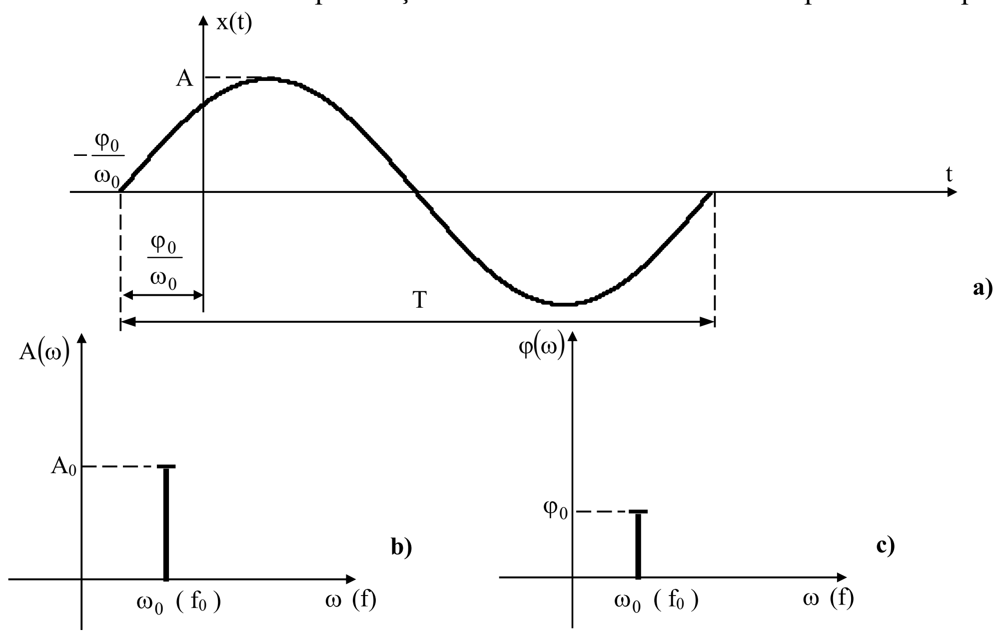


Fig. 5.5: Semnal sinusoidal (cosinusoidal)

a) forma de undă
b) spectrul de amplitudini
c) spectrul de faze

Grafic, se obţine forma de undă a semnalului prezentată în figura 5.5a.
Reprezentarea în domeniul frecvenţă se obţine considerând ca variabilă independentă pulsaţia, ω_0 (sau frecvenţa, f_0).
Grafic, se pot obţine două reprezentări:
- spectrul de amplitudini al semnalului în care se ilustrează variaţia amplitudinii semnalului funcţie de pulsaţie (frecvenţă) - $A(\omega)$ sau A(f) - vezi figura 5.5b.
- spectrul de faze al semnalului în care se ilustrează variaţia fazei semnalului funcţie de pulsaţie (frecvenţă) - $\varphi(\omega)$ sau $\varphi(f)$ - vezi figura 5.5c.

5.3.2. Reprezentarea în domeniul timp şi în frecvenţă ale unui semnal exprimat printr-o sumă de semnale sinusoidale.

Expresia analitică a semnalului este de forma:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N} A_k \sin(\omega_k t+\varphi_k) \tag{5.16}$$

Spectrul de amplitudini al semnalului este (re)prezentat în figura 5.6a iar spectrul de faze în figura 5.6b.
Observaţii:
- Fiecărei componente sinusoidale a semnalului (5.16) îi corespunde o *singură* linie spectrală (fie de amplitudini, fie de fază);

- Sumei de semnale sinusoidale îi va corespunde un *spectru discret* de amplitudini, respectiv de faze (fiecărei frecvenţe îi va corespunde valoarea corespunzătoare a amplitudinii, respectiv a fazei);
- Cum metoda de analiză spectrală a unui semnal periodic nesinusoidal este de a-l aproxima printr-o sumă de semnale sinusoidale de frecvenţe diferite şi cum fiecărei frecvenţe îi corespunde o singură amplitudine, respectiv fază, rezultă că acestui semnal îi corespunde un *spectru discret* de amplitudini (faze);
- Dacă în expresia (5.16) $N \to \infty$, iar $(\omega_{k+1} - \omega_k) \to 0$ în diagramele spectrale de amplitudini şi de faze, liniile spectrale devin atât de dese încât nu se poate face distincţie între două linii succesive. În acest caz, *spectrele discrete* $A_k(\omega_k)$şi $\varphi_k(\omega_k)$ se transformă în spectre *continue*, ce se vor nota $A(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$.

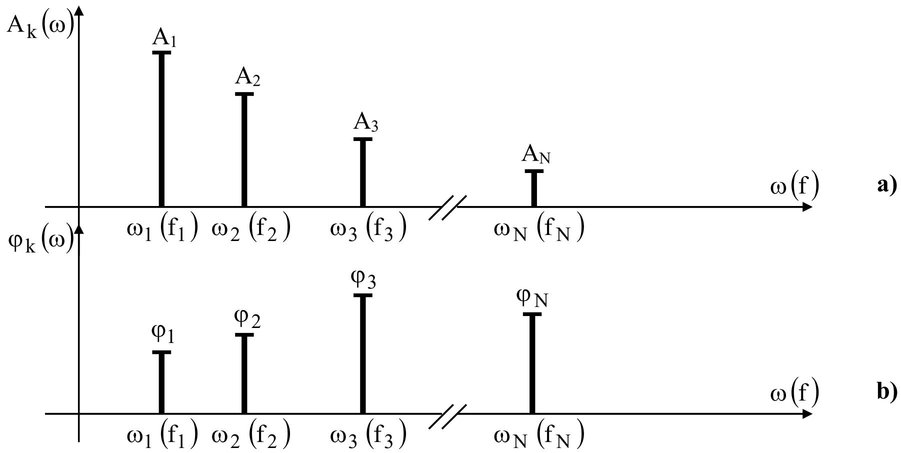


Fig. 5.6: Spectrul de frecvenţă al semnalului exprimat printr-o sumă de semnale sinusoidale

a) Spectrul de amplitudini
b) spectrul de faze

5.4. ANALIZA SEMNALELOR

5.4.1. Generalităţi

Conform definiţiei din 5.1.1. analiza semnalului x(t) constă în echivalarea sa printr-o sumă de semnale elementare (serie Fourier):

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n f_n(t) \tag{5.17}$$

în care:

- a_n sunt coeficienţi;
- $f_n(t)$ sunt expresiile analitice ale semnalelor elementare;

Observaţii:

1) Este indicat ca funcţiile $f_n(t)$ să aibă o reprezentare analitică simplă;
2) Relaţia (5.17) este deosebit de importantă în cazul circuitelor liniare la care se poate aplica teorema superpoziţiei; dacă y(t), $\varphi_n(t)$ sunt răspunsurile circuitului liniar la semnalele x(t), $f_n(t)$ se poate scrie că:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(t) \tag{5.18}$$

   În acest caz răspunsul la semnalul $x(t)$ se deduce prin sumarea răspunsurilor parţiale, obţinute pentru semnalele elementare $f_n(t)$;
3) N poate fi finit sau infinit. Calculele sunt mai comode atunci când N este finit şi de o valoare mică; în acest caz atât semnalul cât şi răspunsul se exprimă printr-un

număr redus de termeni. Cum N este teoretic infinit, se constată că valorile coeficienţilor a_n devin neglijabile începând cu o valoare n_{max} a rangului n. Prin urmare se pot neglija termenii cu rangul $n > n_{max}$, obţinându-se astfel o exprimare aproximativă a semnalului x(t).

Analiza (spectrală a) semnalului constă în determinarea coeficienţilor a_n atunci când este dat semnalul x(t) şi când este precizat setul de funcţii $f_n(t)$.

5.4.2. Alegerea setului de funcţii $f_n(t)$

Setul de funcţii trebuie să se bucure de proprietatea de *ortogonalitate*, adică:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f_m(t) f_n(t)\,dt = \begin{cases} C^2 & \text{dacă } m = n \\ 0 & \text{dacă } m \neq n \end{cases} \tag{5.19}$$

unde **C** reprezintă **norma** funcţiilor;

<u>Observaţii</u>:

1) În cazul în care $C = 1$, setul de funcţii se spune că este *ortonormat*.
2) În cazul în care una din funcţiile $f_n(t)$ este o constantă A, aplicând (5.19) se obţine valoarea constantei:

$$A = \frac{C}{\sqrt{T}} \tag{5.20}$$

Concluzie:

Pentru a realiza analiza Fourier a semnalelor, se apelează la următorul set de funcţii trigonometrice:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right), \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) \tag{5.21}$$

5.5. ANALIZA SPECTRALĂ A SEMNALELOR PERIODICE

Analiza spectrală a semnalelor periodice constă în descompunerea acestora în funcţii elementare (semnale sinusoidale de amplitudini, frecvenţe şi faze iniţiale diferite) obţinute cu ajutorul seriilor Fourier.

Dezvoltarea în serie Fourier poate să ia mai multe forme:

- forma trigonometrică (SFT);
- forma armonică (SFA);
- forma exponenţială (SFE);

5.5.1. Forma trigonometrică a dezvoltării Fourier (SFT)

Expresia matematică a dezvoltării semnalului x(t) în serie Fourier trigonometrică este următoarea:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(n\omega_0 t) \tag{5.22}$$

unde $f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ reprezintă frecvenţa (de repetiţie) a semnalului periodic – *frecvenţa fundamentală*.

Pentru determinarea coeficienţilor C_0, C_n, S_n, se procedează după cum urmează, avându-se în vedere faptul că integrala unei funcţii periodice pe o perioadă este nulă:

$$(5.22) \Rightarrow \int_T x(t)dt = C_0 T \Leftrightarrow C_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt$$

$$(5.22) \Rightarrow \int_T x(t)\cos(k\omega_0 t)dt = C_k \int_T \cos^2(k\omega_0 t)dt = \frac{T}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(k\omega_0 t)dt$$

$$(5.22) \Rightarrow \int_T x(t)\sin(k\omega_0 t)dt = S_k \int_T \sin^2(k\omega_0 t)dt = \frac{T}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin(k\omega_0 t)dt$$

S-a ţinut cont de următoarele relaţii, care pot fi verificate cu uşurinţă:

$$\int_T \cos(k\omega_0 t)\sin(p\omega_0 t)dt = 0,\ \forall k,p \in \mathbf{N}$$

$$\int_T \cos(k\omega_0 t)\cos(p\omega_0 t)dt = \begin{cases} 0, & k \neq p \\ \frac{T}{2}, & k = p \end{cases}$$

$$\int_T \sin(k\omega_0 t)\sin(p\omega_0 t)dt = \begin{cases} 0, & k \neq p \\ \frac{T}{2}, & k = p \end{cases}$$

Ca exemplificare, se pot demonstra ultimele două relaţii pentru cazul $k = p$:

$$\left.\begin{array}{l} I := \int_T \cos^2(k\omega_0 t)dt \\ J := \int_T \sin^2(k\omega_0 t)dt \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} I + J = \int_T dt = T \\ I - J = \int_T \cos(2k\omega_0 t)dt = 0 \end{array}\right| \Rightarrow I = J = \frac{T}{2}$$

Într-o exprimare echivalentă, s-a demonstrat că funcţiile sin şi cos sunt ortogonale.

În concluzie, coeficienţii C_0, C_n, S_n, se calculează cu relaţiile:

- $C_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt$ (5.23)
- $C_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(k\omega_0 t)dt$ (5.24)
- $S_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin(k\omega_0 t)dt$ (5.25)

5.5.2. Forma armonică a dezvoltării Fourier (SFA)

Seria trigonometrică poate fi reprezentată într-o formă mai compactă, denumită formă armonică, utilizând numai funcţii cosinusoidale.

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\,\omega_0 t + \varphi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\,\omega_0 t + \varphi_n) \quad (5.26)$$

unde

- $A_n = \sqrt{C_n^2 + S_n^2}$ (5.27)
- $A_0 = C_0$ (5.28)
- La determinarea defazajelor φ_n, trebuie observat că aceasta revine la o transformare de tipul: $C\cos x + S\sin x = A\cos(x + \varphi)$, cu $A = \sqrt{C^2 + S^2} > 0$. Pentru a încadra aceste defazaje în intervalul $-\pi \le \varphi_n \le \pi$ şi ţinând cont de semnele coeficienţilor C şi S, se obţin prin trigonometrie elementară rezultatele:

$$\varphi_n = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{dacă } C_n = 0 \text{ şi } S_n < 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{dacă } C_n = 0 \text{ şi } S_n > 0 \\ \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{S_n}{C_n} & \text{dacă } C_n < 0 \text{ şi } S_n < 0 \\ -\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{S_n}{C_n} & \text{dacă } C_n > 0 \text{ şi } S_n > 0 \\ 0 & \text{dacă } C_n > 0 \text{ şi } S_n = 0 \\ \pi & \text{dacă } C_n < 0 \text{ şi } S_n = 0 \\ -\operatorname{arctg}\dfrac{S_n}{C_n} & \text{dacă } C_n > 0 \text{ şi } S_n \neq 0 \end{cases} \tag{5.29}$$

Seria Fourier armonică (SFA) dă o descompunere a semnalului periodic într-o sumă de semnale cosinusoidale ale căror frecvenţe sunt multipli ai frecvenţei fundamentale f_0 a semnalului periodic; similar se poate deduce o SFA în sinus.
Punând într-o formă desfăşurată expresia (5.26) se pun în evidenţă componenta continuă şi armonicile semnalului:

- Componenta continuă - (la frecvenţa $f = 0$)
  $A_0 = C_0$
- Armonica fundamentală (fundamentala) - la frecvenţa $f = f_0 = \dfrac{1}{T}$, $n = 1$:
  $A_1 \cos(1 \cdot \omega_0 t + \varphi_1) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$
- Armonica de ordinul doi – la frecvenţa $f = 2f_0 = \dfrac{2}{T}$, $n = 2$:
  $A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2)$

....

- Armonica de ordinul k – la frecvenţa $f = k f_0 = \dfrac{k}{T}$, $n = k$:
  $A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$

....

Observaţii:

- În cazul în care funcţia care descrie semnalul x(t) este pară, dezvoltarea în serie trigonometrică va coincide cu dezvoltarea în serie armonică. Din (5.25) se obţine că $S_n = 0$ şi din (5.27) rezultă că $A_n = |C_n|$. De asemenea, din (5.29) rezultă $\varphi_n = 0$ sau $\varphi_n = \pi$, după cum $C_n > 0$, respectiv $C_n < 0$.
  Ca urmare, semnalul x(t) poate fi scris sub forma:
  $$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \cos(n\omega_0 t + \varphi_n), \text{ cu } \varphi_n \in \{0; \pi\} \tag{5.30}$$
- În cazul în care funcţia care descrie semnalul x(t) este impară, conform (5.24) se obţine că $C_n = 0$ şi din (5.27) rezultă că $A_n = |S_n|$. Din (5.23) se obţine că $C_0 = 0$, adică semnalul nu are componentă continuă. De asemenea, din (5.29) $\varphi_n = -\dfrac{\pi}{2}$ sau $\varphi_n = \dfrac{\pi}{2}$, după cum $S_n > 0$, respectiv $S_n < 0$.
  Ca urmare, semnalul poate fi scris ca o sumă de funcţii (co)sinusoidale de forma:

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}S_n\cos\left(n\omega_0 t+\varphi_n\right),\ \text{cu}\ \varphi_n\in\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\} \tag{5.31}$$

Concluzii:

1) Caracterizarea în domeniul frecvenţă se realizează prin diagramele spectrale asociate seriei armonice, spectrul de amplitudini: $A_n(n\omega_0)$ sau $A_n(nf_0)$ şi spectrul de faze: $\varphi_n(n\omega_0)$ sau $\varphi_n(nf_0)$.
2) Valoarea coeficienţilor reprezintă amplitudinile armonicelor de pulsaţie $n\omega_0$ (sau frecvenţă nf_0).
3) Liniile spectrale asociate seriei armonice vor fi localizate la pulsaţiile (frecvenţele) $0,\ \omega_0,2\omega_0,...$

5.5.3. Banda de frecvenţă ocupată de un semnal periodic

Teoretic, spectrele semnalelor periodice acoperă domeniul de la $\omega=0$ (componenta continuă sau valoarea medie a semnalului) la $\omega\to\infty$. Practic, spectrele sunt limitate. Reprezentarea diagramei spectrale de amplitudini pune în evidenţă legea de descreştere a amplitudinilor armonicelor, permiţând să se limiteze seria la termenul de rang n_{max}, amplitudinile componentelor devenind neglijabile pentru $n>n_{max}$.

Trunchierea seriei de la un anumit termen depinde de cerinţele impuse tipului de comunicaţie care utilizează semnalul respectiv. Se pot considera neglijabile componentele ale căror amplitudini sunt mai mici decât o anumită fracţiune din amplitudinea fundamentalei: $A_{n_{max}}\le A_1\cdot p\%$. (5.32)

O altă modalitate de determinare a benzii este considerarea acelor armonici ce asigură o energie de cel puţin w% din energia totală a semnalului. Cum mărimea $\sum_{n\ge0}A_n^2$ este proporţională cu energia semnalului, rezultă că această condiţie se poate scrie sub forma:

$$\sum_{n=0}^{n_{max}}A_n^2\ge\left(\sum_{n\ge0}A_n^2\right)\cdot w\%. \tag{5.33}$$

În urma realizării analizei spectrale se poate determina lăţimea benzii de frecvenţe ocupată de acel semnal, luând de exemplu $0<p\le10$ sau $90\le w<100$.

În cazul spectrelor care prezintă anulări (frecvenţe la care amplitudinile armonicilor corespunzătoare sunt nule), în multe cazuri banda se consideră ca intervalul cuprins între 0 (zero) şi prima frecvenţă la care armonica este nulă.

5.5.4. Algoritmul utilizat în analiza spectrală

Pentru o cât mai corectă abordare a paşilor matematici ce au ca scop analiza spectrală a unui semnal periodic, se propune următorul algoritm:

1) Scrierea expresiei matematice a semnalului;
2) Reprezentarea grafică a evoluţiei în timp a semnalului;
3) Analiza simetriei semnalului (Un semnal eventual par sau impar duce la o simplificare în calculele matematice);
4) Dezvoltarea în serie Fourier trigonometrică (SFT) a semnalului - calculul coeficienţilor C_n şi S_n, conform (5.23) – (5.25);
5) Scrierea seriei Fourier armonică (SFA) a semnalului – calculul coeficienţilor A_0 ;i A_n, precum şi a defazajelor φ_n, conform (5.27) – (5.29);
6) Reprezentarea spectrului de amplitudine şi de fază;
7) Determinarea lărgimii de bandă a semnalului.

5.6. APLICAŢII

5.6.1. Analiza spectrală a semnalului liniar variabil periodic

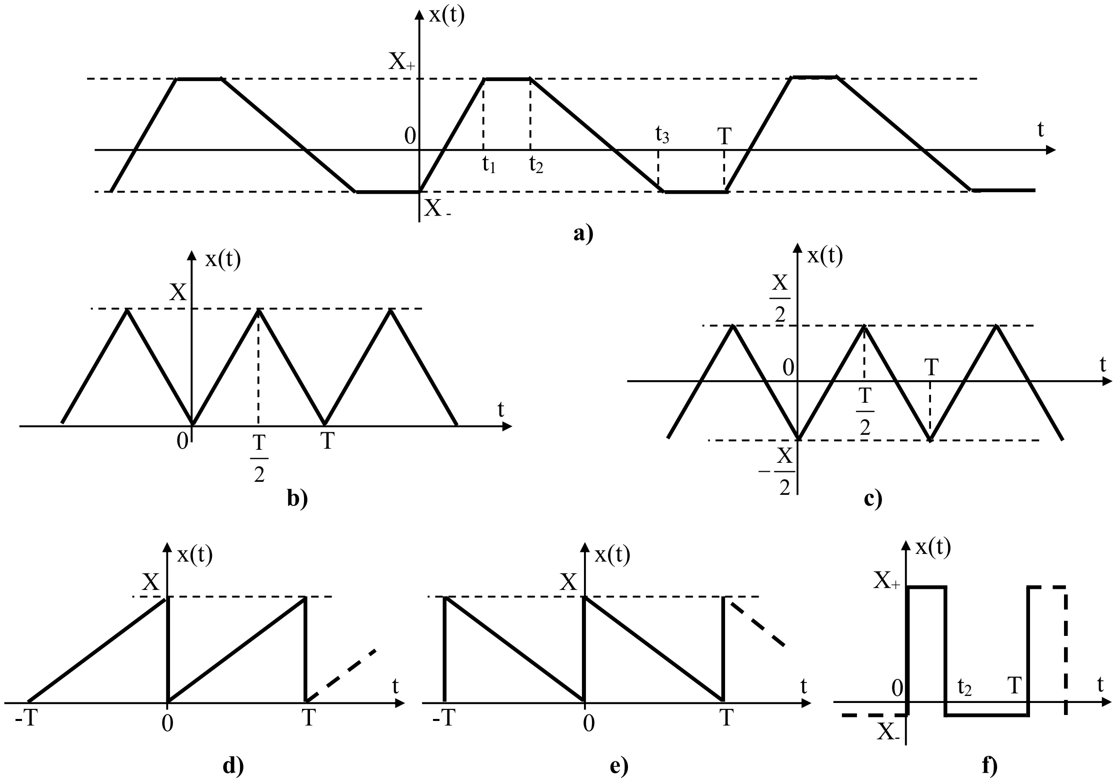


Fig. 5.7: Impulsul liniar variabil periodic

a) Impuls oarecare;
b) Impuls triunghiular pozitiv;
c) Impuls triunghiular simetric;
d) Impuls “dinte de fierăstrău” crescător;
e) Impuls “dinte de fierăstrău” descrescător ;
f) Impuls dreptunghiular.

Forma cea mai generală a unui astfel de impuls este cea din figura 5.7a, iar în figurile 5.7b, ..., 5.7f sunt reprezentate cazurile particulare cele mai folosite în practică. Astfel, dacă se notează $q_1 = \frac{t_1}{T}$, $q_2 = \frac{t_2}{T}$, $q_3 = \frac{t_3}{T}$ cu $0 \le q_1 \le q_2 \le q_3 \le 1$, cazurile particulare reprezentate în figura 5.7 sunt următoarele:

- $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}; q_3 = 1; X_- = 0; X_+ := X$ (impuls triunghiular pozitiv, figura 5.7b); se poate observa că acest semnal este par;
- $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}; q_3 = 1; X_+ = -X_- := \frac{X}{2}$ (impuls triunghiular simetric, figura 5.7c); acest semnal este de asemenea par, putând fi transformat şi într-unul impar (prin schimbarea sau transformarea de variabilă $\tau = t \pm \frac{T}{4}$);
- $q_1 = q_2 = q_3 = 1; X_- = 0; X_+ := X$ (“dinte de fierăstrău” crescător, figura 5.7d);
- $q_1 = q_2 = 0; q_3 = 1; X_- = 0; X_+ := X$ (“dinte de fierăstrău” descrescător, figura 5.7e);
- De asemenea, în figura 5.7f se poate observa că dacă $q_1 = 0; q_2 = q_3 := q$, atunci se obţine semnalul periodic dreptunghiular (de tipul celui din figura 5.2).

Rezolvare

1) Expresia matematică a semnalului oarecare (figura 5.7a) este următoarea:

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{X_+-X_-}{t_1}t+X_-=\dfrac{X_+-X_-}{q_1T}t+X_- & \text{dacă}\quad 0\le t\le t_1=q_1T\\ X_+ & \text{dacă}\quad t_1\le q_1T<t\le t_2=q_2T\\ \dfrac{X_+-X_-}{(q_2-q_3)T}t+\dfrac{q_2X_--q_3X_+}{q_2-q_3} & \text{dacă}\quad t_2=q_2T\le t\le t_3=q_3T\\ X_- & \text{dacă}\quad t_3=q_3T\le t\le T\end{cases}$$

2) Forma de undă a semnalului este cea din figura 5.7a.

3) Funcţia nu este nici pară nici impară. Pentru simplificarea scrierii se introduc notaţiile:

- $a_1:=\dfrac{X_+-X_-}{q_1T}$
- $a_2:=\dfrac{X_+-X_-}{(q_2-q_3)T}$
- $b_2:=\dfrac{q_2X_--q_3X_+}{q_2-q_3}$

4); 5) SFA: $x(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0t+\varphi_n)=A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0t+\varphi_n)$, unde $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$

$$A_0=C_0=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt=\frac{1}{T}\left(\int_0^{q_1T}(a_1t+X_-)dt+\int_{q_1T}^{q_2T}X_+dt+\int_{q_2T}^{q_3T}(a_2t+b_2)dt+\int_{q_3T}^{T}X_-dt\right)=$$

$$=\frac{1}{T}\left(a_1\frac{t^2}{2}\bigg|_0^{q_1T}+q_1TX_-+T(q_2-q_1)X_++a_2\frac{t^2}{2}\bigg|_{q_2T}^{q_3T}+b_2T(q_3-q_2)+T(1-q_3)X_-\right)=$$

$$=a_1\frac{q_1^2T}{2}+(q_3^2-q_2^2)\frac{a_2T}{2}+b_2(q_2-q_3)+(q_2-q_1)X_++(1+q_1-q_3)X_-=$$

$$=\frac{X_+-X_-}{2}q_1+(1+q_1-q_3)X_-+(q_2-q_1)X_+-\frac{X_+-X_-}{2}(q_2+q_3)-q_2X_-+q_3X_+=$$

$$=\frac{X_+}{2}(q_3+q_2-q_1)+X_-\left(1-\frac{q_3+q_2-q_1}{2}\right)$$

$$C_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega_0t)dt=\frac{2}{T}\left(\begin{array}{l}\int_0^{q_1T}(a_1t+X_-)\cos(n\omega_0t)dt+X_+\int_{q_1T}^{q_2T}\cos(n\omega_0t)dt+\\+\int_{q_2T}^{q_3T}(a_1t+b_2)\cos(n\omega_0t)dt+X_-\int_{q_3T}^{T}\cos(n\omega_0t)dt\end{array}\right)$$

Efectuând calculele cu atenţie şi ţinând cont că $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$, se obţine:

$$C_n = \frac{q_3 - q_2 + q_2\cos(2nq_1\pi) + q_1\cos(2nq_3\pi) - q_3\cos(2nq_1\pi) - q_1\cos(2nq_2\pi)}{2n^2 q_1(q_3 - q_2)\pi^2} X_- +$$
$$+ \frac{q_3\cos(2nq_1\pi) - q_2\cos(2nq_1\pi) + q_1\cos(2nq_2\pi) - q_3 - q_1\cos(2nq_3\pi) + q_2}{2n^2 q_1(q_3 - q_2)\pi^2} X_+$$
$$C_n = \frac{(q_3 - q_2)(1 - \cos(2nq_1\pi)) + q_1(\cos(2nq_3\pi) - \cos(2nq_2\pi))}{2n^2 q_1(q_3 - q_2)\pi^2} X_- +$$
$$+ \frac{(q_3 - q_2)(\cos(2nq_1\pi) - 1) - q_1(\cos(2nq_3\pi) - \cos(2nq_2\pi))}{2n^2 q_1(q_3 - q_2)\pi^2} X_+$$
$$C_n = \left(\frac{(1 - \cos(2nq_1\pi))}{2n^2 q_1\pi^2} + \frac{q_1(\cos(2nq_3\pi) - \cos(2nq_2\pi))}{2n^2 q_1(q_3 - q_2)\pi^2}\right)(X_- - X_+)$$
$$C_n = \left(\frac{\sin^2(nq_1\pi)}{n^2 q_1\pi^2} - \frac{\sin(n(q_3 + q_2)\pi)\sin(n(q_3 - q_2)\pi)}{n^2(q_3 - q_2)\pi^2}\right)(X_- - X_+)$$
$$C_n = ((q_3 + q_2)\operatorname{sinc}(n(q_3 + q_2)\pi)\operatorname{sinc}(n(q_3 - q_2)\pi) - q_1\operatorname{sinc}^2(nq_1\pi))(X_+ - X_-)$$
unde:
$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$
este funcţia sinus atenuat a cărei reprezentare grafică este prezentată în figura 5.8.

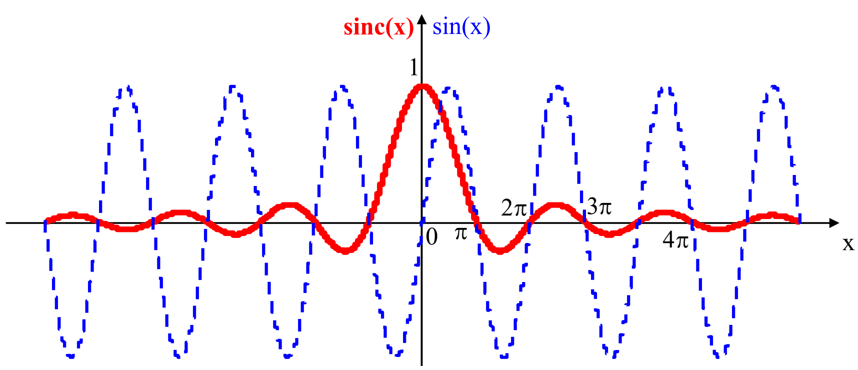


Fig. 5.8: Formele de undă a semnalelor *sinus atenuat*, sinc(x) şi sin(x)

$$S_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\left(\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{q_1T}(a_1 t + X_-)\sin(n\omega_0 t)dt + X_+\int_{q_1T}^{q_2T}\sin(n\omega_0 t)dt + \\ \displaystyle + \int_{q_2T}^{q_3T}(a_1 t + b_2)\sin(n\omega_0 t)dt + X_-\int_{q_3T}^{T}\sin(n\omega_0 t)dt \end{array}\right)$$
$$S_n = -\frac{(q_3 - q_2)\sin(2nq_1\pi) - q_1(\sin(2nq_3\pi) - \sin(2nq_2\pi))}{2n^2 q_1(q_3 - q_2)\pi^2} X_- -$$
$$- \frac{-q_1\sin(2nq_2\pi) - q_3\sin(2nq_1\pi) + q_2\sin(2nq_1\pi) + q_1\sin(2nq_3\pi)}{2n^2 q_1(q_3 - q_2)\pi^2} X_+$$
$$S_n = \left(\frac{\operatorname{sinc}(2nq_1\pi)}{n\pi} - \frac{q_1(\sin(2nq_3\pi) - \sin(2nq_2\pi))}{2n^2 q_1(q_3 - q_2)\pi^2}\right)(X_+ - X_-)$$

$$S_n = \left(\sin c(2nq_1\pi) - \sin c(n(q_3 - q_2)\pi)\cos(n(q_3 + q_2)\pi)\right)\frac{X_+ - X_-}{n\pi}$$

şi $|A_n| = \sqrt{S_n^2 + C_n^2}$; φ_n se determină cu o relaţie de tipul (5.29), funcţie de seria armonică dorită (în cos sau în sin).
În continuare se vor particulariza rezultatele obţinute pe unele din cazurile particulare din figura 5.7.

5.6.2. Analiza spectrală a semnalului drepunghiular

Semnalul periodic dreptunghiular este cazul particular $q_1 = 0; q_2 = q_3 := q$ (figura 5.7f).
Cu notaţia $A := X_+ - X_-$, se obţin rezultatele:

- $A_0 = \frac{X_+}{2}(2q - 0) + X_-\left(1 - \frac{2q - 0}{2}\right) = qA + X_-$, adică (5.11);
- $C_n = \left(\frac{\sin c(0)\sin(2nq\pi)}{n\pi} - 0\right)A = \frac{\sin(2nq\pi)}{n\pi}A$;
- $S_n = \left(\frac{\sin c(0)}{n\pi} - \frac{\sin c(0)\cos(2nq\pi)}{n\pi}\right)A = \frac{1 - \cos(2nq\pi)}{n\pi}A$
- SFA în cos:
  - $$A_n = \sqrt{C_n^2 + S_n^2} = \frac{A}{\pi n}\sqrt{2 - 2\cos(2\pi nq)} = 2|\sin(\pi nq)|\frac{A}{\pi n} = 2|\sin(\pi nq)|\frac{A}{\pi n} =$$
    $$= 2qA\frac{|\sin(\pi nq)|}{\pi nq} = 2qA|\sin c(\pi nq)|$$
  - $$\varphi_n = -\mathrm{arctg}\frac{S_n}{C_n} = -\mathrm{arctg}\left(\frac{1 - \cos(2\pi nq)}{\sin(2\pi nq)}\right) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{2\sin^2(\pi nq)}{2\sin(\pi nq)\cos(\pi nq)}\right);$$

    $\varphi_n = -\pi nq$, cu observaţiile că acest defazaj trebuie încadrat în intervalul $[0;\pi]$ şi că trebuie să se aibă în vedere cazurile menţionate în (5.29).

Corectitudinea acestor rezultate poate fi verificată (şi) prin calcul direct.
În practică, cele mai utilizate impulsuri periodice dreptunghiulare sunt cele pozitive $(X_- = 0)$. În acest caz, mărimea $A := X_+ - X_-$ se mai numeşte şi amplitudinea impulsului.
Pentru cazul semnalului periodic dreptunghiular pozitiv, valorile amplitudinilor armonicelor precum şi frecvenţele lor sunt următoarele:

- Componenta continuă – (la frecvenţa f = 0)
  $A_0 = C_0 = qA$
- Amplitudinea armonicii fundamentale – (la frecvenţa $f = f_0 = \frac{1}{T}$, $n = 1$):
  $$A_1 = 2qA|\sin c(\pi q)| = \frac{2A}{\pi}|\sin(\pi q)|$$
- Amplitudinea armonicii de ordinul doi (a doua) – (la frecvenţa $f = 2f_0 = \frac{2}{T}$, $n = 2$)
  $$A_2 = 2qA|\sin c(2\pi q)| = \frac{A}{\pi}|\sin(2\pi q)|$$
  ....
- Amplitudinea armonicii de ordinul $\frac{1}{q}$ – (la frecvenţa $f = \frac{1}{q}f_0 = \frac{1}{qT}$ – dacă $\frac{1}{q} \in \mathbf{N}$)
  $A_{\frac{1}{q}} = 2qA\sin c(\pi) = 0$ – prima anulare (trecere prin zero) a spectrului;

....

- Amplitudinea armonicii de ordinul k – (la frecvenţa $f = k f_0 = \frac{k}{T}$, $n = k$)

$$A_k = 2qA\left|\sin c(\pi kq)\right| = \frac{2A}{\pi}\left|\sin(\pi kq)\right|.$$

iar semnalul x(t) scris sub forma SFA are expresia:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = qA + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin(\pi nq)\right|}{n}\cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$$

De exemplu, în cazul $q = \frac{1}{5}$, expresiile matematice ale componentei continue şi primelor patru armonici sunt următoarele:

- $A_0 = \frac{A}{5}$;
- $A_1(t) = \frac{2A}{\pi}\left|\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right|\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{2A}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{5}\right)$
- $A_2(t) = \frac{A}{\pi}\left|\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right|\cos\left(2\omega_0 t - \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{A}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(2\omega_0 t - \frac{2\pi}{5}\right)$;
- $A_3(t) = \frac{2A}{3\pi}\left|\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right|\cos\left(3\omega_0 t - \frac{3\pi}{5}\right) = \frac{A}{\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\cos\left(2\omega_0 t - \frac{2\pi}{5}\right)$;
- $A_4(t) = \frac{A}{2\pi}\left|\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right|\cos\left(4\omega_0 t - \frac{4\pi}{5}\right) = \frac{A}{2\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\cos\left(4\omega_0 t - \frac{4\pi}{5}\right)$

Expresia semnalului aproximat până la a cincea armonică (care este nulă) este:

$$x(t) \approx \frac{A}{5} + \frac{2A}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{5}\right) + \frac{A}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(2\omega_0 t - \frac{2\pi}{5}\right) +$$

$$+ \frac{2A}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\cos\left(3\omega_0 t - \frac{3\pi}{5}\right) + \frac{A}{2\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\cos\left(4\omega_0 t - \frac{4\pi}{5}\right)$$

În figura 5.9 sunt reprezentate formele de undă ale primelor patru armonici ale semnalului, precum şi semnalul aproximat printr-o SFA care reţine doar componenta continuă şi primele patru armonici. Practic, aproximarea semnalului cu primele sale 4 armonici este echivalentă cu aproximarea benzii cu primul interval de frecevnţă în care toate armonicile sunt nenule.

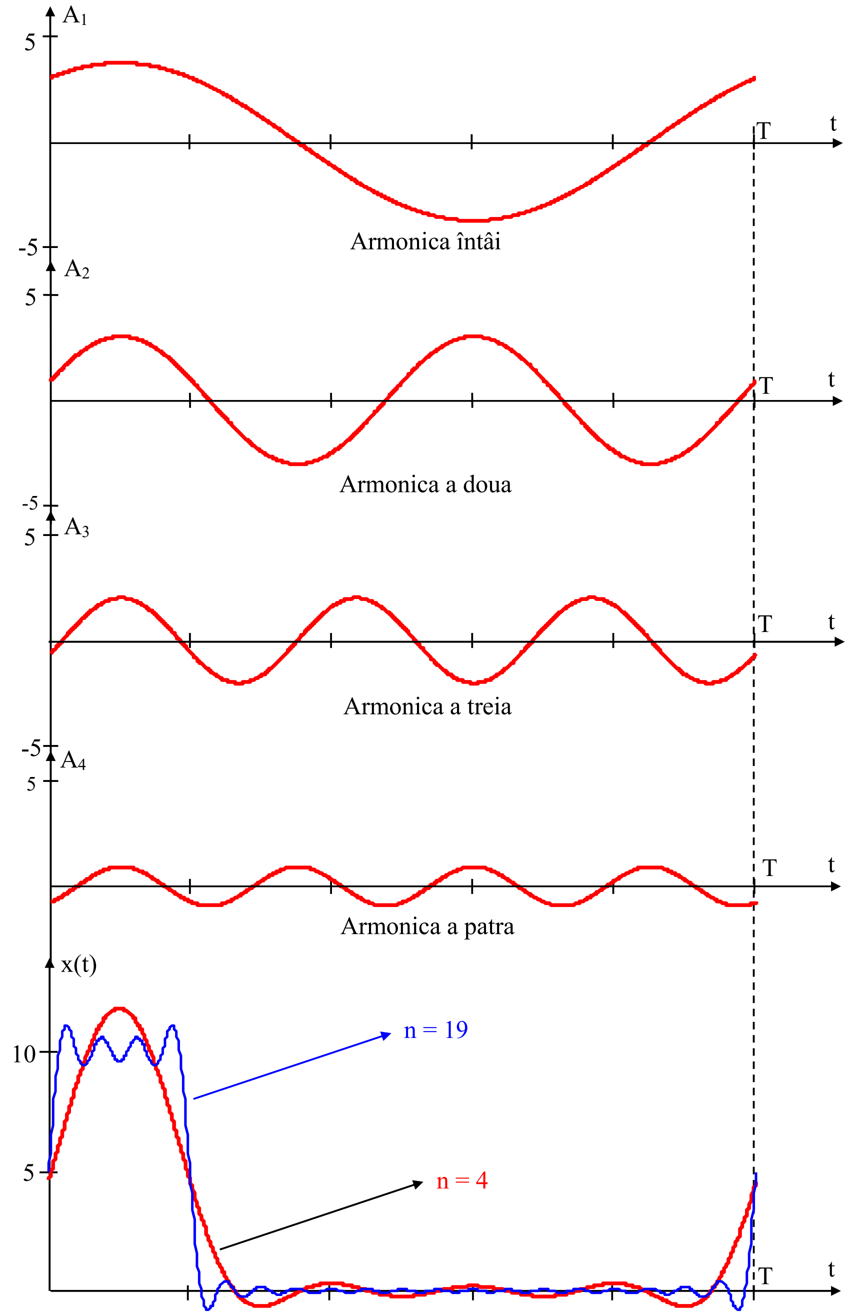


Fig. 5.9: Formele de undă ale primelor patru armonici ale impulsului periodic dreptunghiular cu $q = \frac{1}{5}$ şi $A = 10$, şi semnalul "refăcut" prin sumarea componentei continue şi a primelor 4, respectiv 19 armonici

6) Forma armonică a dezvoltării Fourier oferă posibilitatea de a reprezenta spectrele de amplitudini $A_n = A_n(\omega)$ sau $A_n = A_n(f)$, respectiv de faze $\varphi_n = \varphi_n(\omega)$ sau $\varphi_n = \varphi_n(f)$ ale semnalului. Pentru a realiza aceaste reprezentări grafice se (re)aminteşte că:

- Spectrul unui semnal periodic este discret;
- $|A_k| > |A_{k+1}| \;\; k \in [1 \ldots \infty)$, $\lim\limits_{k \to \infty} A_k = 0$;
- Ordinul, (k) al armonicelor care se anulează se determină astfel:

  $A_k = 0 \Rightarrow 2qA \sin c(k\pi q) = 0 \Rightarrow \sin(k\pi q) = 0 \Rightarrow k\pi q = m\pi$, unde $m \in \mathbf{Z}$. $\Rightarrow k = {}^{m}\!/_{q}$.

Spectrele corespunzătoare semnalului analizat mai sus sunt reprezentate în figura 5.10.

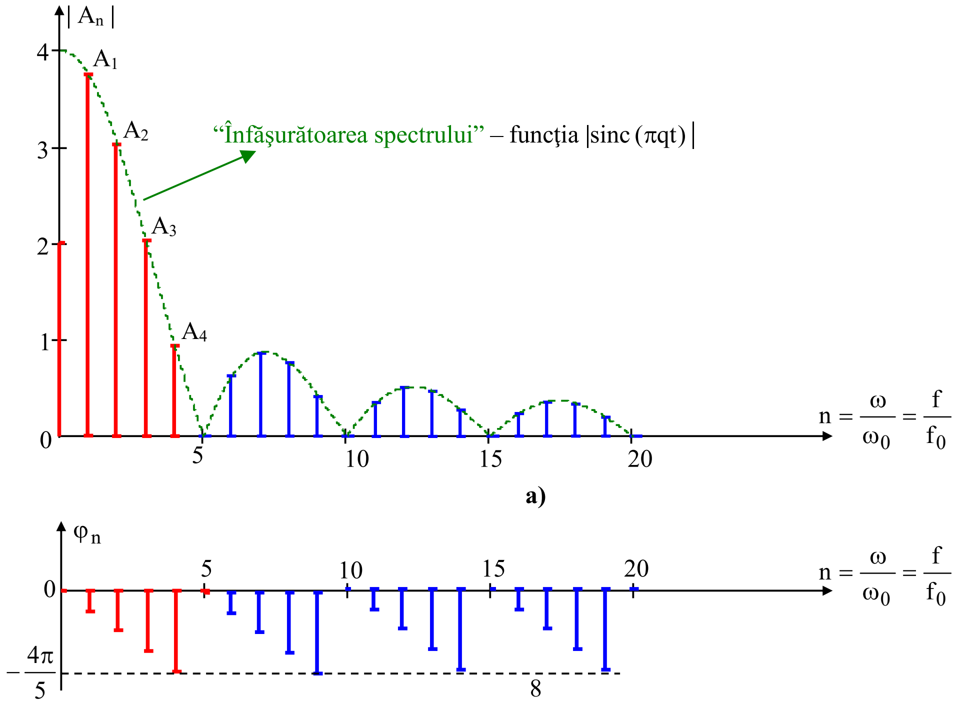


Fig. 5.10: Distribuţia spectrulă a semnalului periodic dreptunghiular

a) modulul spectrului de amplitudini

b) spectrul de faze

7) Determinarea lărgimii de bandă a semnalului:

În cazul semnalului periodic dreptunghiular, din punctul de vedere al calculului lărgimii de bandă, importantă este prima frecvenţă la care armonica este nulă (primul punct de trecere prin zero al spectrului sau prima trecere prin zero a înfăşurătoarei semnalului), care se obţine pentru $m = 1$. Pentru factori de umplere mici $\left(q < \frac{1}{9}\right)$, se poate considera că lărgimea de bandă este $B = \left[1; \frac{f_0}{q}\right][\mathrm{Hz}]$, numărul armonicelor din bandă fiind $\left[\frac{1}{q} - 1\right]$. Totuşi, această observaţie trebuie folosită cu precauţie: chiar în cazul analizat $(q = 0{,}2)$, admiţând că $B = \left[1; \frac{f_0}{q}\right] = [1; 5f_0]$ (de fapt $B = [1; 4f_0]$, pentru că $A_5 = 0$), raportul $\left|\frac{A_6}{A_1}\right|$ (între prima armonică neglijată şi fundamentală) este $\frac{A_6}{A_1} = 17\%$, destul de greu de neglijat. În schimb, $\frac{A_{11}}{A_1} = 9\% < 10\%$, deci ar părea mai firească alegerea benzii din primii doi "lobi" ai caracteristicii spectrale de amplitudine din figura 5.10a: $B = \left[1; \frac{2f_0}{q}\right]$. Cel mai mare factor de umplere pentru care $\frac{A_{\frac{1}{q}+1}}{A_1} \le 10\%$ este $q = \frac{1}{9}$.

Cea mai evidentă situaţie în care nu se poate admite alegerea benzii $B=\left[1;\frac{f_0}{q}\right]$ este impulsul cu $q=\frac{1}{2}$: ar rezulta $B=[1;2f_0]$, dar cum $A_2=0$, de fapt banda ar consta numai din prima armonică. Altfel spus, impulsul dreptunghiular cu $q=\frac{1}{2}$ ar fi „bine aproximat” de semnalul sinusoidal pe frecvenţa fundamentală (frecvenţa impulsului) axat pe componenta continuă, ceea ce evident că este inacceptabil.

Notând $x_{0.5}(t)$ impulsul cu $q=\frac{1}{2}$, coeficienţii Fourier corespunzători sunt următorii:

$$C_0=A_0=\frac{A}{2};$$

$$C_n=\frac{A}{n\pi}\left|\sin(\pi n)\right|=0;$$

$$S_n=\begin{cases}0 & \text{dacă } n=2k \quad k\in\mathbf{N}^* \\ \dfrac{2A}{(2k+1)\pi} & \text{dacă } n=2k+1 \quad k\in\mathbf{N}\end{cases};$$

Se observă că semnalul $x_{0.5}(t)$ este caracterizat numai de armonici impare.

Rezultă dezvoltarea sa în SFA în sinus:

$$x_{0.5}(t)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin((2k+1)\omega_0 t),\ \text{cu}\ \omega_0=\frac{2\pi}{T}\ (A_n=S_n\ \text{şi}\ \varphi_n=0).$$

Pentru SFA în cosinus, $A_n=S_n>0$ şi $\varphi_n=-\frac{\pi}{2}$, obţinându-se astfel:

$$x_{0.5}(t)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos\left((2k+1)\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)$$

Conform criteriului „10% din fundamentală”, în acest caz banda este $B=\left[1;\frac{5f_0}{q}\right]$, deoarece $\left|\frac{A_{11}}{A_1}\right|=9\%<10\%$.

În figura 5.11 s-a reprezentat spectrul de amplitudini şi “refacerea semnalului” cu ajutorul armonicilor din banda considerată în conformitate cu cele de mai sus.

Amplitudinile armonicelor din banda considerată, respectiv defazajele corespunzătoare SFA în cosinus sunt următoarele:

$$\begin{cases}A_0=\dfrac{A}{2} & \\ A_1=\dfrac{2A}{\pi} & \varphi_1=-\dfrac{\pi}{2} \\ A_3=\dfrac{2A}{3\pi} & \varphi_3=-\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases}A_5=\dfrac{2A}{5\pi} & \varphi_5=-\dfrac{\pi}{2} \\ A_7=\dfrac{2A}{7\pi} & \varphi_7=-\dfrac{\pi}{2} \\ A_9=\dfrac{2A}{9\pi} & \varphi_9=-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Armonicile pare sunt nule: $A_2=A_4=A_6=A_8=0$, respectiv $\varphi_2=\varphi_4=\varphi_6=\varphi_8=0$.

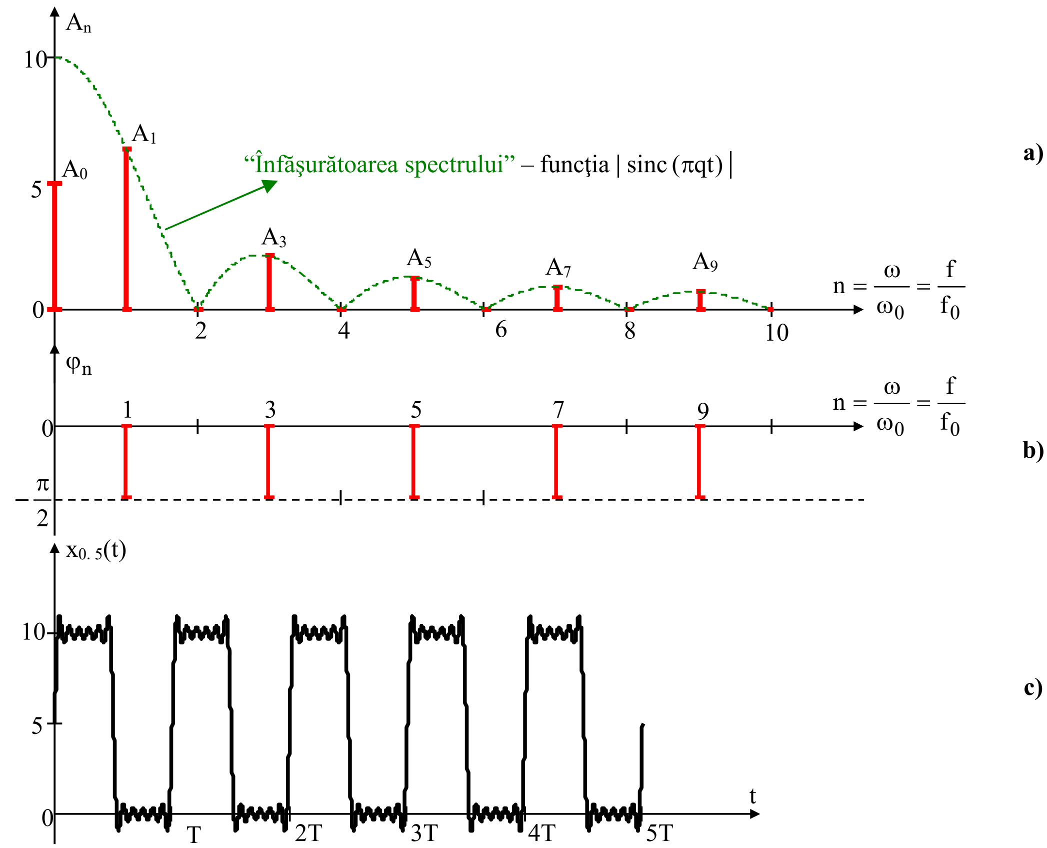


Fig. 5.11: Semnalului periodic dreptunghiular cu $A = 10$ şi $q = \frac{1}{2}$

a) Spectrul de amplitudini;
b) Spectrul de faze al SFA în cosinus;
c) Aproximarea semnalului prin sumarea armonicilor din bandă.

5.6.3. Analiza spectrală a semnalului „dinte de fierăstrău" periodic şi crescător

Acest semnal, în varianta sa pozitivă, se obţine dacă se particularizează $q_1 = q_2 = q_3 = 1; X_- = 0; X_+ := A > 0$ (figura 5.7d). Rezultă:

- $A_0 = \frac{A}{2}(1+1-1) = \frac{A}{2}$;
- $C_n = \left(\frac{\sin c(0)\sin(2n\pi)}{n\pi} - \sin c^2(n\pi)\right)A = 0$;
- $S_n = \left(\frac{\sin c(2n\pi)}{n\pi} - \frac{\sin c(0)\cos(2n\pi)}{n\pi}\right)A = -\frac{A}{n\pi}$;
- $|A_n| = \sqrt{S_n^2 + C_n^2} = \frac{A}{\pi n}$;
- $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$ pentru SFA în cos, sau $\varphi_n = \pi$ pentru SFA în sin.

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{A}{\pi} & \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2} & \text{pentru } f_1 = f_0 \\ A_2 = \dfrac{A}{2\pi} & \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2} & \text{pentru } f_2 = 2f_0 \\ A_3 = \dfrac{A}{3\pi} & \varphi_3 = \dfrac{\pi}{2} & \text{pentru } f_3 = 3f_0 \\ A_4 = \dfrac{A}{4\pi} & \varphi_4 = \dfrac{\pi}{2} & \text{pentru } f_4 = 4f_0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_5 = \dfrac{A}{5\pi} & \varphi_5 = \dfrac{\pi}{2} & \text{pentru } f_5 = 5f_0 \\ A_6 = \dfrac{A}{6\pi} & \varphi_6 = \dfrac{\pi}{2} & \text{pentru } f_6 = 6f_0 \\ A_7 = \dfrac{A}{7\pi} & \varphi_7 = \dfrac{\pi}{2} & \text{pentru } f_7 = 7f_0 \\ A_8 = \dfrac{A}{8\pi} & \varphi_8 = \dfrac{\pi}{2} & \text{pentru } f_8 = 8f_0 \end{cases} \quad \ldots\ldots$$

În concluzie:

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\left(n\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$ - SFA în cosinus – cea de mai sus – sau

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(n\omega_0 t + \pi\right)$$ - SFA în sinus.

6) Spectrele amplitudinilor şi fazelor sunt reprezentate în figura 5.12.

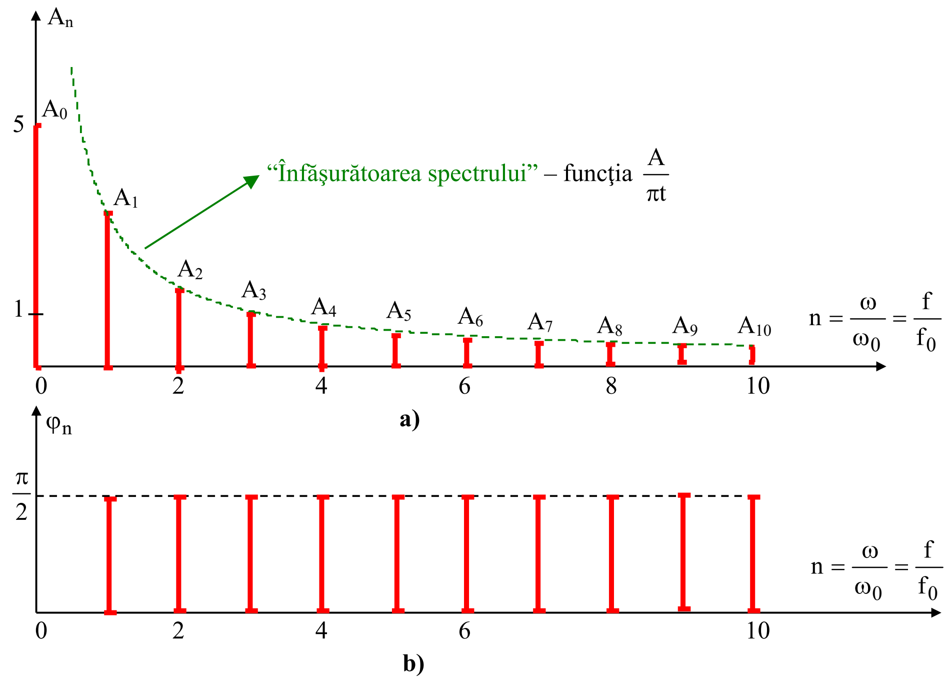


Fig. 5.12: Spectrele semnalului "dinte de fierăstrău" crescător şi pozitiv

a) spectrul de de amplitudini ;
b) spectrul de faze.

7) Întrucât nu există puncte de trecere prin zero a spectrului, banda semnalului se limitează la frecvenţa $n\omega_0$ care asigură $|A_n| \le |10\% \cdot A_1|$. Cum $\frac{A_n}{A_1} = \frac{1}{n}$, rezultă că $B = [0;10\omega_0]$.

În figura 5.13 sunt reprezentate două " reconstituiri" ale semnalului x(t) cu ajutorul armonicelor sale, adică $x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\cos\left(n\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$: în figura 5.13a cu ajutorul armonicelor din banda considerată (primele 10, adică $N = 10$), iar în figura 5.13b cu ajutorul a 100 armonici, adică $N = 100$ (ceea ce ar fi echivalent cu a mări banda la intervalul frecvenţelor în care $A_n \ge 1\% \cdot A_1$).

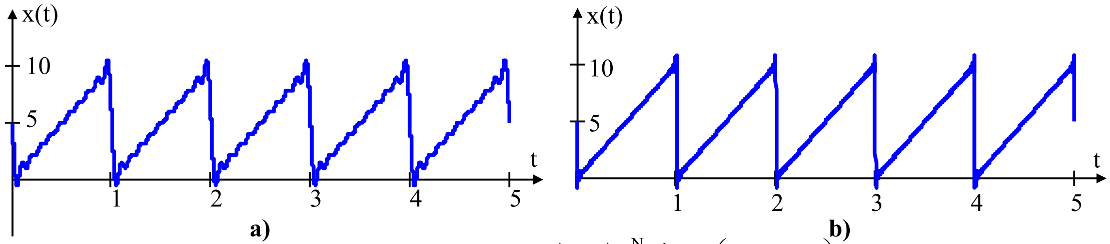


Fig. 5.13: Semnalul periodic $x(t)=\frac{A}{2}+\frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\cos\left(n\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right)$ cu T = 1s şi:

a) N = 10 (armoniceledin bandă);

b) N = 100.

<u>Observaţii</u>

1) În cazul semnalelor fără simetrii, este de multe ori utilă o transformare de variabilă care să simetrizeze semnalul. De exemplu, în cazul de faţă, transformarea:

$$\begin{cases} t' = t - \frac{T}{2} \\ x' = x - \frac{A}{2} \Rightarrow x(t) = x'\left(t' + \frac{T}{2}\right) + \frac{A}{2} \end{cases}$$

face ca semnalul $x'(t')$ să devină impar, fiind reprezentat în figura 5.14 şi având expresia analitică:

$$x'(t') = \frac{A}{T}t' \quad \text{pentru } |t'| < \frac{T}{2}$$

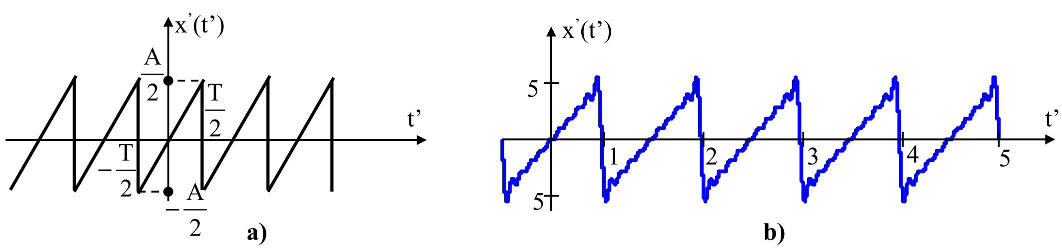


Fig. 5.14: Semnalul “dinte de fierăstrău” periodic şi impar, crescător

a) forma de undă ;

b) reconstituirea sa cu primele 10 armonici.

Orice translaţie pe axa timpului (abscisa) nu afectează spectrul de amplitudini, ci numai spectrul de faze. În schimb, translaţiile pe axa semnalului (axa ordonatelor) afectează spectrul de amplitudini, şi anume, modifică valoarea componentei continue.
În acest caz, componenta continuă devine $C_0 = A_0 = 0$, $C_n = 0$ iar $S_n = -\frac{A\cos(n\pi)}{n\pi}$, după cum se poate verifica (şi) prin prin calcul direct. Aceste expresii **NU** pot fi deduse din relaţiile generale obţinute în problema 5.6.1, deoarece acolo integralele s-au calculat pe intervalul $[0;T]$ şi nu pe $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$. Eventual se pot reface acele calcule pentru cazul $t \in [t_0; T+t_0]$ şi particularizându-ae pentru $t_0 = -\frac{T}{2}$, obţinându-se astfel un (alt) set de3 expresii generale de tipul celor amintite.

Rezultă că $A_n = \frac{A}{n\pi}$ (nemodificat, după cum deja s-a afirmat mai sus) şi $\varphi_n = (-1)^n \frac{\pi}{2}$ pentru SFA în cos, care astfel devine:

$$x'(t') = \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\cos\left(n\omega_0 t' + (-1)^n \frac{\pi}{2}\right)$$

Reconstituirea semnalului x'(t') cu ajutorul acestei expresii a SFA asociate (cu $N = 10$ armonici) este prezentată în figura 5.14b. Se poate observa întârzierea pe axa timpului şi absenţa componentei continue.

2) Similar se poate face analiza spectrală a ”dintelui de fierăstrău” descrescător, reprezentat în figura 5.7e. În acest caz, trebuie particularizate valorile:

$$q_1 = q_2 = 0; q_3 = 1; X_- = 0; X_+ := A > 0$$

Se obţin rezultatele:

$$A_0 = \frac{A}{2}(1 + 0 - 0) = \frac{A}{2}$$

$$C_n = \left(\frac{\sin c(n(1-0)\pi)\sin(n(1+0)\pi)}{n\pi} - 0 \cdot \sin c^2(0)\right)(X_+ - X_-) = 0$$

$$S_n = \left(\frac{\sin c(0)}{n\pi} - \frac{\sin c(n\pi)\cos(n\pi)}{n\pi}\right)(X_+ - X_-) = \frac{A}{n\pi}$$

$|A_n| = \sqrt{S_n^2 + C_n^2} = C_n$; $\varphi_n = -\frac{\pi}{2}$, în conformitate cu (5.29).

Spectrul de amplitudini este identic cu cel din figura 5.12a, iar cel de faze rezultă din figura 5.12b prin simetrizare faţă de axa frecvenţelor (relative).

3) Considerând în expresiile generale ale coeficienţilor Fourier valorile $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$; $q_3 = 1$; $X_- = 0; X_+ := A > 0$, se obţine semnalul triunghiular pozitiv (figura 5.7c). Se obţin astfel următoarele rezultate:

$$A_0 = \frac{A}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{A}{2}$$

$$C_n = ((q_3 + q_2)\sin c(n(q_3 + q_2)\pi)\sin c(n(q_3 - q_2)\pi) - q_1 \sin c^2(nq_1\pi))(X_+ - X_-)$$

$$C_n = \left(3\sin c\left(n\frac{3\pi}{2}\right)\sin c\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \sin c^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)\frac{A}{2} \Rightarrow C_{2k} = 0, \forall k \in \mathbf{N}^*$$

$$C_{2k+1} = \frac{A}{2}\sin c\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)\left(3\sin c\left(\frac{3(2k+1)\pi}{2}\right) - \sin c\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}\left(2 \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)\pi} - 2 \cdot \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}\right)A = -\frac{4A}{(2k+1)^2\pi^2}, \ k \in \mathbf{N}$$

$$S_n = -\frac{A}{n\pi}\sin c\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) = 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$$

$|A_n| = \sqrt{S_n^2 + C_n^2} = |C_n|$ şi în connformitate cu (5.29) rezultă $\varphi_n = \pi, \forall n \in 2\mathbf{N} + 1$.

Banda: $\frac{A_n}{A_1} \le 10\% \Leftrightarrow \frac{-\frac{4A}{n^2\pi^2}}{-\frac{4A}{\pi^2}} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow n^2 \ge 10 \xrightarrow[n \in \mathbf{N}^*]{} n \ge 4$. Cum $A_4 = 0$, rezultă că se poate considera banda $B = [0; 5f_0]$.

În figura 5.15a,b sunt prezentate spectrele obţinute cu ajutorul acestor rezultate, iar în figura 5.15c,d reconstituiri ale semnalului cu ajutorul SFA.

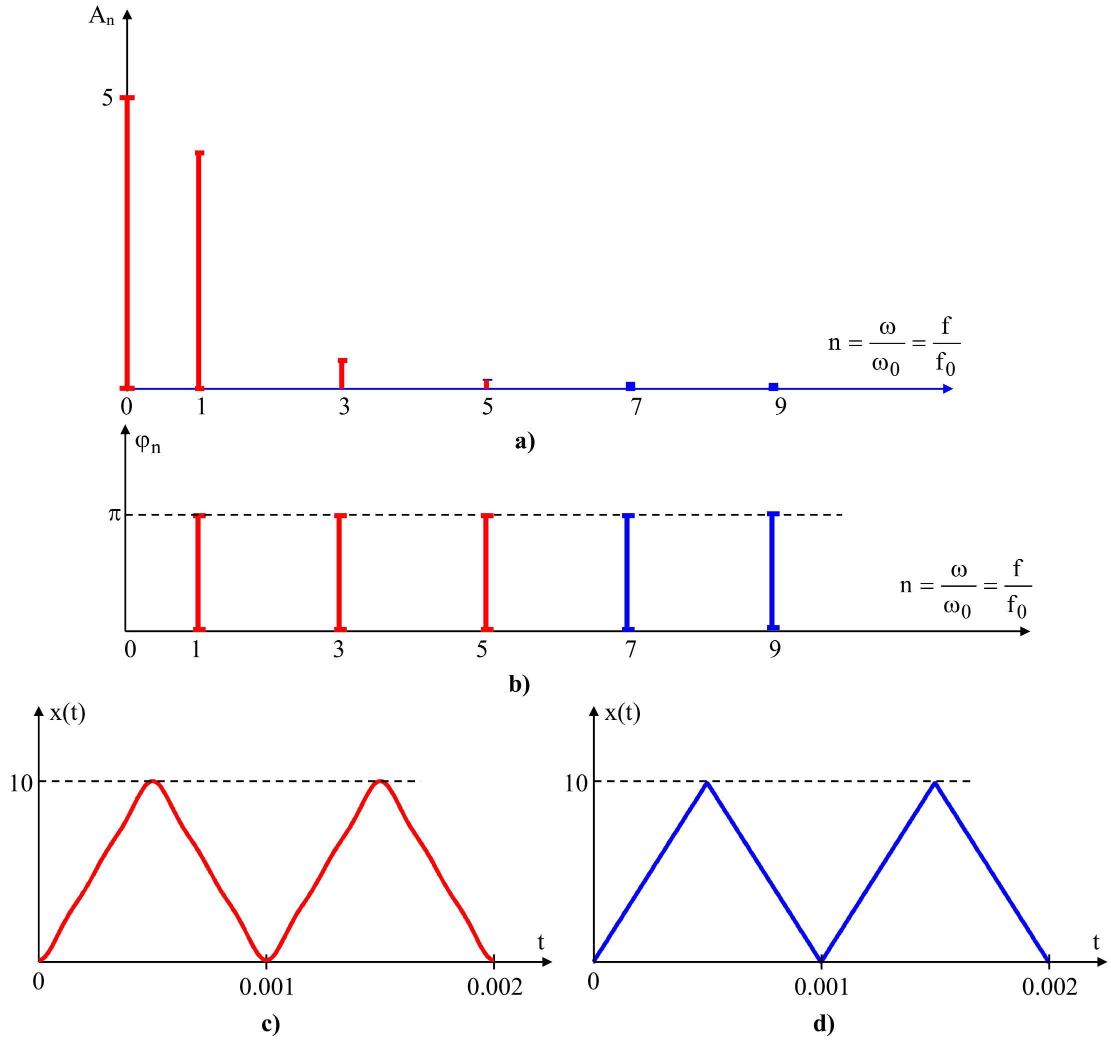


Fig. 5.15: Semnalul triunghiular pozitiv

a) Spectrul de amplitudini;
b) Spectrul de faze
c) Reconstituirea semnalului cu armononicile din bandă (primele 5);
d) Reconstituirea semnalului cu primele sale 20 de armonici.

5.6.4. Analiza spectrală a semnalului "sinus redresat dublă-alternanţă" periodic

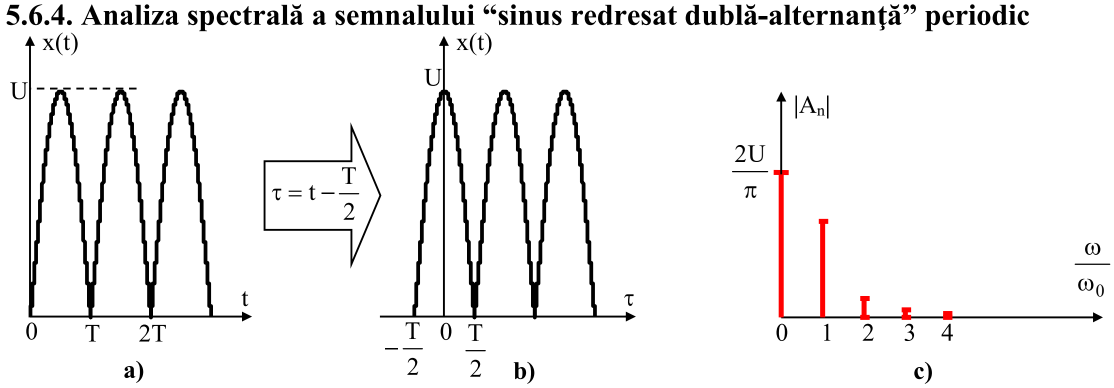


Fig. 5.16: Sinusoida redresată dublă-alternanţă

a) Forma de undă
b) Semnalul simetrizat
c) Spectrul de amplitudini

Forma de undă este reprezentată în figura 5.16a. Expresia analitică a semnalului este:

$x(t) = U|\sin(\omega t)|$, unde $\omega = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$ este pulsaţia semnalului sinusoidal neredresat. Evident T (perioada semnalului redresat) este jumătate din perioada sinusoidei neredresate (care este 2T – figura 5.16a). În conformitate cu (5.22), pulsaţia fundamentală este: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Prin schimbarea de variabilă:

$$\tau = t - \frac{T}{2} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{T}{2} < \tau < \frac{T}{2} \\ dt = d\tau \\ t = \tau + \frac{T}{2} \end{cases},$$

semnalul devine par (figura 5.16b). Rezultă că $S_n = 0$; $A_n = C_n$.

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\tau)d\tau = \frac{U}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{T}\left(\tau + \frac{T}{2}\right)\right)d\tau = \frac{U}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)d\tau = \frac{2U}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2U}{\pi}$$

$$C_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\tau)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}\tau\right)d\tau = \frac{4U}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}\tau\right)d\tau =$$

$$= \frac{2U}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{T}\tau\right]d\tau + \frac{2U}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\cos\left[(2n-1)\frac{\pi}{T}\tau\right]d\tau =$$

$$= \frac{2U}{(2n+1)\pi}\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{T}\tau\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{2U}{(2n-1)\pi}\cdot\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{T}\tau\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{2U}{\pi}\left(\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1} + \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1}\right) = \frac{4U}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

În concluzie:

$$A_n = |C_n| = \begin{cases} \frac{2U}{\pi} & \text{pentru} \quad n = 0 \\ \frac{4U}{\pi(4n^2-1)}. & \text{pentru} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$\varphi_n = -\mathrm{arctg}\left(\frac{S_n}{C_n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n = 2k+1 \\ -\pi & \text{pentru } n = 2k \end{cases}, \; k \geq 1$$

Dezvoltarea semnalului în SFA este:

$$x(t) = \frac{2U}{\pi} + \frac{4U}{3\pi}\cos(\omega_0 t) + \frac{4U}{15\pi}\cos(2\omega_0 t - \pi) + \frac{4U}{35\pi}\cos(3\omega_0 t) + \frac{4U}{63\pi}\cos(4\omega_0 t - \pi) + ...$$

Spectrul de amplitudini al semnalului este prezentat în figura 5.16c.

5.6.5. Analiza spectrală a semnalului “sinus redresat mono-alternanţă” periodic

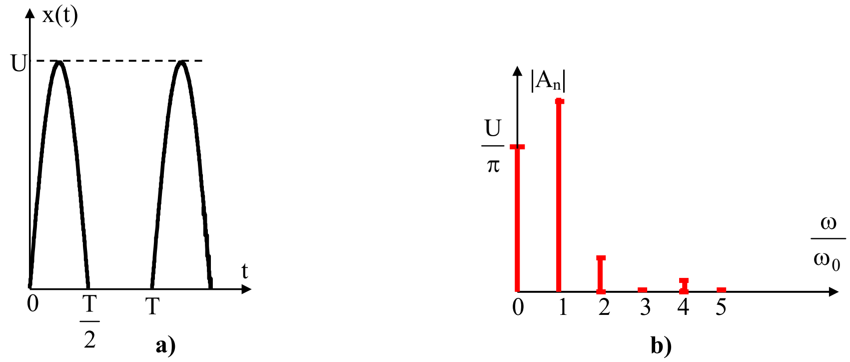


Fig. 5.17: Sinusoida redresată mono-alternanţă

a) Forma de undă
b) Spectrul de amplitudini

Forma de undă este reprezentată în figura 5.17a. Expresia analitică a semnalului este:

$$x(t)=\begin{cases} U\sin(\omega t) & \text{pentru} \quad 0\le t\le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{pentru} \quad \frac{T}{2}\le t\le T \end{cases},$$

unde $\omega=\frac{2\pi}{T}$ este pulsaţia semnalului sinusoidal neredresat. Evident semnalul redresat are aceeaşi perioadă, astfel că, în conformitate cu (5.22) pulsaţia fundamentală este: $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$.

$$C_0=\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}x(t)d\tau=\frac{U}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt=-\frac{U}{T\frac{2\pi}{T}}\cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}=\frac{U}{\pi}$$

$$C_n=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}x(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt=\frac{2U}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt=$$

$$=\frac{U}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\left[2(n+1)\frac{\pi}{T}t\right]dt-\frac{U}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\left[2(n-1)\frac{\pi}{T}t\right]dt=$$

$$=-\frac{U}{2(n+1)\pi}\cos\left[2(n+1)\frac{\pi}{T}t\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}+\frac{U}{2(n-1)\pi}\cos\left[2(n-1)\frac{\pi}{T}t\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}=$$

$$=\frac{U}{2(n+1)\pi}(1-\cos((n+1)\pi))+\frac{U}{2(n-1)\pi}(\cos((n-1)\pi)-1)=$$

$$=\frac{U}{2\pi}\left(\frac{1-\cos((n+1)\pi)}{(n+1)}-\frac{1-\cos((n-1)\pi)}{(n-1)}\right)=\begin{cases}\frac{2U}{\pi(1-n^2)} & \text{pentru } n=2k \\ 0 & \text{pentru } n=2k+1; k\neq 0\end{cases}$$

Pentru cazul $n=1$ se observă că există o nedeterminare, deci C_1 trebuie calculat direct:

$$C_1=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}x(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt=\frac{2U}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt=\frac{U}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)dt=0$$

În concluzie:

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{2U}{\pi\left(1-n^2\right)} & \text{pentru} \quad n = 2k \\ 0 & \text{pentru} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

$$S_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} x(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{2U}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt =$$

$$= \frac{U}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left[2(n+1)\frac{\pi}{T}t\right]dt - \frac{U}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left[2(n-1)\frac{\pi}{T}\tau\right]d\tau =$$

$$= \frac{U}{2(n+1)\pi}\sin\left[2(n+1)\frac{\pi}{T}t\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{U}{2(n-1)\pi}\sin\left[2(n-1)\frac{\pi}{T}t\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} = 0, \forall n \neq 1$$

Pentru cazul $n = 1$ se observă că există o nedeterminare, deci S_1 trebuie calculat direct:

$$S_1 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} x(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{2U}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{U}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 1-\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)dt = \frac{U}{2}$$

În concluzie:

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{U}{2} & \text{pentru} \quad n = 1 \\ 0 & \text{pentru} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$$A_n = \sqrt{S_n^2 + C_n^2} = \begin{cases} \dfrac{U}{\pi} & \text{pentru} \quad n = 0 \\ \dfrac{U}{2} & \text{pentru} \quad n = 1 \\ \left|C_n\right| & \text{pentru} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$$\varphi_n = -\text{arctg}\left(\frac{S_n}{C_n}\right) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{pentru } n = 1 \\ -\pi & \text{pentru } n \geq 2 \end{cases}$$

Dezvoltarea semnalului în SFA este:

$$x(t) = \frac{U}{\pi} + \frac{U}{2}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2U}{3\pi}\cos(2\omega_0 t - \pi) + \frac{2U}{15\pi}\cos(4\omega_0 t - \pi) + \frac{2U}{35\pi}\cos(6\omega_0 t - \pi) + \ldots$$

Spectrul de amplitudini al semnalului este prezentat în figura 5.17b.

5.6.6. Să se determine SFA în cos asociată semnalului: $x(t) = 2\sin(t)\cos(3t)$:

Prin transformări trigonomrtrice elementare (transformarea produsului în sumă) se obţine:

$$x(t) = 2(\sin(t+3t) + \sin(t-3t))$$

Din aceasta rezultă că semnalul este evident periodic, cu perioda $T = \pi$, deci pulsaţia sa fundamentală este: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.

SFA cerută se obţine imediat: $x(t) = 2\sin(4t) - 2\sin(2t) = 2\cos\left(2t + \dfrac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(4t - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Rezultă că semnalul de analizat are 2 armonici: $A_1 = A_2 = 2$, caracterizate de defazajele: $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$ şi $\varphi_2 = -\dfrac{\pi}{2}$; componenta continuă este $A_0 = 0$, după cum se poate determina imediat prin calcul direct.

6. ANALIZA SPECTRALĂ A SEMNALELOR NEPERIODICE

6.1. NOŢIUNI INTRODUCTIVE. TRANSFORMATA FOURIER

Semnalul neperiodic poate fi considerat cazul limită al unui semnal periodic, la care perioada tinde spre infinit. Cum în cazul semnalelor periodice trecerea din domeniul timp în domeniul frecvenţă se realizează prin intermediul *seriilor Fourier*, în cazul semnalelor neperiodice legătura dintre cele două domenii se realizează prin intermediul *transformatei Fourier*. Pentru a uşura introducerea acesteia, se va scrie seria Fourier ataşată unui semnal periodic sub forma (echivalentă) a seriei Fourier exponenţiale. Iniţial se vor reaminti scrierile lui Euler:

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha\,, \tag{6.1}$$

de unde, ţinând cont de paritatea funcţiei cos $(\cos(-x) = \cos x)$ şi imparitatea funcţiei sin $(\sin(-x) = -\sin x)$, rezultă expresiile echivalente:

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}\,;\ \sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \tag{6.2}$$

Cu acestea, expresia SFA (5.26) se poate scrie sub forma:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = A_0 + \mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)}\right] =$$

$$= A_0 + \mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} \cdot e^{jn\omega_0 t}\right] = A_0 + \mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_{n_c} e^{jn\omega_0 t}\right]$$

unde

$$A_{n_c} = A_n e^{j\varphi_n} = A_n\left(\cos\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{S_n}{C_n}\right)\right) + j\sin\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{S_n}{C_n}\right)\right)\right) = C_n - jS_n$$

Introducând expresia:

$$A_{-n_c} = C_n + jS_n = A^*_{n_c}\,,$$

rezultă că:

$$A_{-n_c} e^{-jn\omega_0 t} + A_{n_c} e^{jn\omega_0 t} = (C_n + j\cdot S_n)e^{-jn\omega_0 t} + (C_n - j\cdot S_n)e^{jn\omega_0 t} =$$

$$= C_n\left(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}\right) - j\cdot S_n\left(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}\right) =$$

$$= 2C_n \cos(n\omega_0 t) + 2S_n \sin(n\omega_0 t)$$

Cu acestea, dezvoltarea în SFA (5.26) devine:

$$x(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n_c} e^{jn\omega_0 t}\,, \tag{6.3}$$

unde:

$$A_{n_c} = C_n - jS_n\,;\ A_{-n_c} = C_n + jS_n = A^*_{n_c}\,;\ A_{0_c} = 2A_0 \tag{6.4}$$

Coeficienţii A_{n_c} pot fi calculaţi asemănător cu C_n şi S_n:

$$A_{n_c} = C_n - jS_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)(\cos(n\omega_0 t) - j\sin(n\omega_0 t))dt = \frac{2}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \tag{6.5}$$

Înlocuind în (6.3), se obţine seria Fourier exponenţială, SFE:

$$x(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{T}\left(\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right)e^{jn\omega_0 t} \tag{6.6}$$

Ţinând cont că $\omega_0 T = 2\pi$, (6.6) devine:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right)e^{jn\omega_0 t}\omega_0 \tag{6.7}$$

Considerând acum semnalul neperiodic ca unul periodic cu $T \to \infty$, rezultă că $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \to 0$.
În acest mod, suma din SFE devine o sumă de cantităţi infinitezimale, astfel că se transformă în integrală:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{T} x(t) e^{-j\omega_0 t} dt \right) e^{j\omega_0 t} d\omega_0$$

Renunţând la indicele"0" ce indica frecvenţa fundamentală a semnalului periodic şi punând $T \to \infty$, se obţine expresia integralei Fourier:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega \tag{6.8}$$

În (6.8), partea corespunzătoare expresiei (6.5) a coeficienţilor A_{n_c} se defineşte ca transformată Fourier a semnalului neperiodic x(t):

$$X(j\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{6.9}$$

Comparând relaţiile (6.9) şi (6.5) se vede similitudinea între analiza spectrală a semnalului neperiodic şi cel periodic, obţinut prin repetarea cu o perioadă oarecare T pe cel neperiodic (prelungind semnalul neperiodic prin periodicitate, cu perioada T):

$$A_{n_c} = \frac{2}{T} X(jn\omega_0); \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{6.10}$$

Rezultă că spectrul semnalului periodic este o eşantionare cu frecvenţa fundamentală ω_0 a spectrului semnalului neperiodic, corectată cu factorul de scară $\frac{2}{T}$.

Relaţia (6.8) (integrala Fourier) se mai numeşte şi transformata Fourier inversă sau expresia originalului x(t):

$$x(t) = F^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{6.11}$$

Proprietăţile transformatei Fourier sunt următoarele:

1) Liniaritatea: $F\left\{ \sum_k a_k x_k(t) \right\} = \left\{ \sum_k a_k X_k(j\omega) \right\}$ (6.12)

Demonstraţie:

$$F\left\{ \sum_k a_k x_k(t) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_k a_k x_k(t) \right) e^{-j\omega t} dt = \sum_k a_k \int_{-\infty}^{\infty} x_k(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_k a_k X_k(j\omega).$$

2) Schimbarea scării timpului: $F\left\{ x\left(\frac{t}{a}\right) \right\} = |a| \cdot X(j\omega a)$ (6.13)

Demonstraţie:

Cu schimbarea de variabilă $\frac{t}{a} = \tau$, rezultă $dt = a d\tau$, astfel încât:

$$F\left\{ x\left(\frac{t}{a}\right) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{t}{a}\right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega a \tau} \cdot a \cdot d\tau = |a| X(j\omega a).$$

3) Întârzierea în timp: $F\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$ (6.14)

Demonstraţie:

Cu schimbarea de variabilă: $\tau = t - t_0$, rezultă $dt = d\tau$, astfel încât:

$$F\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(t_0 + \tau)} d\tau = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau. = e^{-j\omega t_0} X(j\omega).$$

4) Deplasarea spectrului (modularea): $F^{-1}\{X(j(\omega-\omega_0))\} = e^{j\omega_0 t}x(t)$ (6.15)

Demonstrație:

Cu schimbarea de variabilă $\omega-\omega_0=\lambda$, rezultă $d\omega=d\lambda$. Se obține:

$$F^{-1}\{X(\omega-\omega_0)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega-\omega_0))e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\lambda)e^{j\lambda t}e^{j\omega_0 t}d\lambda = e^{j\omega_0 t}x(t).$$

5) Derivarea în timp: $F\{x'(t)\} = j\omega X(j\omega)$; $F\{x^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n X(j\omega)$ (6.16)

Demonstrație:

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{j\omega X(j\omega)}_{Y(j\omega)}e^{j\omega t}d\omega = F^{-1}\{Y(j\omega)\}$$

$$F\{x'(t)\} = F\{F^{-1}\{Y(j\omega)\}\} = Y(j\omega) = j\omega X(j\omega).$$

6) Derivarea în domeniul frecvență: $F^{-1}\{X'(j\omega)\} = (-jt)\cdot x(t)$ (6.17)

Demonstrație:

$$X'(j\omega) = \frac{d}{d\omega}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{-jt\cdot x(t)}_{y(t)}e^{-j\omega t}dt = F\{y(t)\}$$

$$F^{-1}\{X'(j\omega)\} = F^{-1}\{F\{y(t)\}\} = y(t) = (-jt)\cdot x(t).$$

7) Integrarea în timp: $F\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{X(j\omega)}{j\omega}$ (6.18)

Demonstrație:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega\right]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{t} e^{j\omega\tau}d\tau\right]X(j\omega)d\omega;$$

Dar $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{j\omega\tau}d\tau = \frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega\tau}\Big|_{-\infty}^{t}\right) = \frac{e^{j\omega t}}{j\omega}$, astfel că:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{X(j\omega)}{j\omega}\right)}_{Y(j\omega)}e^{j\omega\tau}d\omega = F^{-1}\{Y(j\omega)\}$$

În concluzie: $F\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = F\{F^{-1}\{Y(j\omega)\}\} = Y(j\omega) = \dfrac{X(j\omega)}{j\omega}$.

8) Integrarea în domeniul frecvență: $F^{-1}\left\{\int_{-\infty}^{\omega} X(j\lambda)d\lambda\right\} = -\dfrac{1}{jt}x(t)$ (6.19)

Demonstrație:

$$\int_{-\infty}^{\omega} X(j\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\omega}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\lambda t}dt\right]d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{\omega} e^{-j\lambda t}d\lambda\right]dt;$$

Dar $\displaystyle\int_{-\infty}^{\omega} e^{-j\lambda t}d\lambda = -\frac{1}{jt}\left(e^{-j\lambda t}\Big|_{-\infty}^{\omega}\right) = -\frac{1}{jt}e^{-j\omega t}$, astfel că:

$$\int_{-\infty}^{\omega} X(j\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(-\frac{1}{jt}\right)\cdot x(t)}_{y(t)}e^{-j\omega t}dt = F\{y(t)\}$$

În concluzie: $F^{-1}\left\{\int_{-\infty}^{\omega} X(j\lambda)d\lambda\right\} = F^{-1}\{F\{y(t)\}\} = y(t) = -\dfrac{1}{jt}x(t)$.

9) Simetria: Dacă $F\{x(t)\} = X(j\omega)$, atunci $F\{X(t)\} = 2\pi x(-\omega)$

Demonstraţie:

Dacă în (6.11) se face interschimbarea $\omega \leftrightarrow t$, atunci rezultă că:

$$x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{j\omega t}dt$$

Rezultă că: $2\pi\, x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-jt\omega}dt = F\{X(t)\}$.

6.2 ANALIZA SPECTRALĂ A SEMNALELOR NEPERIODICE. MOD DE LUCRU

Pornind de la ideea că semnalul neperiodic este unul periodic cu perioada T infinită, frecvenţa fundamentală f_0 devine tot mai mică, spectrul tot mai dens, la limită nemaiputându-se discrimina două componente spectrale succesive, spectrul existând pentru orice pulsaţie ω (sau frecvenţă f).

În concluzie, spectrul unui semnal neperiodic devine un spectru continuu.

Expresia (6.9) $F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ poartă numele de funcţie de densitate spectrală sau spectru de frecvenţe.

Observaţii:

1) Funcţia de densitate spectrală este continuă, ea existând pentru orice ω (sau f).
2) Funcţia de densitate spectrală este o funcţie complexă, putând fi scrisă sub formă de modul şi fază, astfel:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \tag{6.20}$$

unde:

- $|X(j\omega)| = M(\omega)$ reprezintă modulul densităţii spectrale de amplitudine (spectrul de amplitudini);
- $\varphi(\omega)$ reprezintă spectrul de fază;

3) Deoarece funcţia de densitate spectrală este o funcţie complexă se poate scrie că:

$$X(j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) \tag{6.21}$$

unde:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\omega t dt \; ; \; B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin\omega t dt \tag{6.22}$$

În acest caz se poate scrie că:

- $$M(\omega) = |X(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \tag{6.23}$$
- $$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right) \tag{6.24}$$

Dacă:

- Funcţia $x(t)$ este pară, $(x(-t) = x(t))$, atunci:

$$B(\omega) = 0 \Rightarrow X(j\omega) = A(\omega) \tag{6.25}$$

Funcţia de densitate spectrală este o funcţie reală.

- Funcţia $x(t)$ este impară, $(x(-t) = -x(t))$, atunci:

$$A(\omega) = 0 \Rightarrow X(j\omega) = -jB(\omega) \tag{6.26}$$

Funcţia de densitate spectrală este o funcţie pur imaginară.

4) Energia E a impulsului este dată de relaţia:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega \tag{6.27}$$

Mărimea $|X(j\omega)|^2 = G(\omega)$ se numeşte densitate spectrală de energie a impulsului.

Pentru a realiza analiza spectrală a semnalelor neperiodice trebuie realizat un studiu asupra absolut integrabilităţii funcţiei x(t).

6.2.1. Funcţia x(t) este absolut integrabilă.

În cazul în care funcţia este absolut integrabilă, este îndeplinită condiţia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \tag{6.28}$$

Interpretarea fizică a condiţiei (6.28) este aceea că aria cuprinsă între curba x(t) şi axa absciselor, calculată între limitele de existenţă (definire) ale semnalului este finită.
Restricţia (6.28) implică faptul că densitatea spectrală de amplitudine a semnalului x(t), dată de (6.9), este finită, putând fi calculată. Acestă observaţie este justificată matematic astfel:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) e^{-j\omega t} \right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \tag{6.29}$$

În cazul funcţiilor absolut integrabile se pot identifica două tipuri de impulsuri:

- Impulsuri cu valori şi durate finite
  Analiza spectrală se realizează aplicându-se transformata Fourier. Calculul densităţii spectrale de amplitudine este de obicei simplu deoarece impulsurile sunt date prin expresii analitice clasice (segmente de drepte, exponenţiale, funcţii trigonometrice...).
- Impulsuri definite pe întreg domeniul: $t \in (-\infty, \infty)$.
  Acestea nu sunt impulsuri în adevăratul sens al cuvântului, dar respectând condiţia (6.28), poate fi calculată densitatea lor de amplitudine.

Pentru a calcula densitatea spectrală se propun următoarele două metode:

a) Calcularea transformatei Fourier: $F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

   Algoritmul de lucru este următorul:
   1) Scrierea expresiei matematice a semnalului;
   2) Reprezentarea grafică a evoluţiei în timp a semnalului;
   3) Analiza simetriei semnalului;
   4) Calculul funcţiei de densitate spectrală a semnalului, $X(j\omega)$; în cazul în care semnalul este par sau impar se utilizează relaţiile (6.25), (6.26);
   5) Calculul modulului densităţii spectrale de amplitudine $|X(j\omega)| = M(\omega)$;
   6) Reprezentarea grafică a modulului densităţii spectrale de amplitudine $|X(j\omega)| = M(\omega)$;
   7) Determinarea lărgimii de bandă a semnalului;
   8) Calculul densităţii spectrale de energie a impulsului $G(\omega)$.

b) Aplicarea proprietăţilor transformatei Fourier.

Prin această metodă se pot simplifica în mod substanţial calculele matematice

6.2.2. Funcţia x(t) nu este absolut integrabilă

Restricţia (6.28) este suficientă dar nu şi necesară deoarece lipsa absolutei integrabilităţi nu implică lipsa de sens a integralei (6.9) (transformata Fourier a semnalului).
Se vor prezenta câteva exemple în care se va calcula densitatea spectrală de amplitudine pentru impulsuri a căror expresie analitică este o funcţie ce nu este absolut integrabilă.
Metoda propusă pentru obţinerea densităţii spectrale în cazul acestor impulsuri este de a calcula transformata Fourier prin trecerea la limită a transformatelor unor impulsuri care sunt absolut integrabile.

6.3. EXEMPLE DE ANALIZĂ SPECTRALĂ A IMPULSURILOR

6.3.1. Analiza spectrală a impulsului Dirac

Impulsul Dirac este definit astfel:

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1 \tag{6.30}$$

Metoda I

Se calculează transformata Fourier

Transformata impulsului Dirac este următoarea:

$$F\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=e^{0}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \tag{6.31}$$

În figura 6.1 este prezentat impulsul Dirac şi transformata Fourier a acestuia.

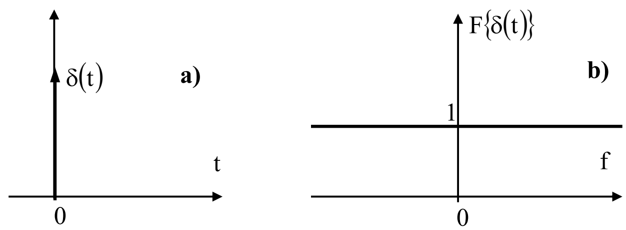


Fig. 6.1: a) Impulsul Dirac, b) Funcţia de densitate spectrală a impulsului Dirac

Cum densitatea de amplitudine sau de energie este constantă pe întreg domeniul de frecvenţă, rezultă că energia impulsului Dirac este infinită, lucru ce implică faptul că acest semnal nu este realizabil din punct de vedere fizic.

Impulsul Dirac poate fi doar aproximat prin impulsuri de durate foarte mici $\tau\to 0$, cu amplitudini foarte mari $\frac{1}{\tau}$.

Metoda II

O variantă (dar nu singura) de a determina transformata Fourier a impulsului Dirac este de a-l aproxima prin aşa numita funcţie de eşantionare:

$$f_e(t)=\frac{k}{\pi}\sin c(kt) \tag{6.32}$$

Conform reprezentărilor grafice ale funcţiei de eşantionare din figura 6.2, se observă că atunci când valoarea lui k se măreşte, lobul principal al funcţiei se îngustează, iar valoarea sa maximă se măreşte.

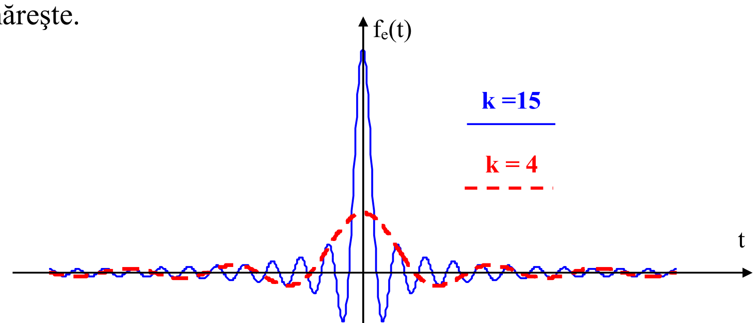


Fig. 6.2: Funcţia de eşantionare $f_e(t)=\frac{k}{\pi}\sin c(kt)$ reprezentată pentru două valori ale parametrului k

Se demonstrează că aria funcţiei de eşantionare este egală cu unitatea, observaţie ce este în concordanţă cu definiţia (6.30) dată impulsului Dirac.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_e(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{\pi}\sin c(kt)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{\pi}\frac{\sin(kt)}{kt}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(kt)}{kt}d(kt)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(v)}{v}d\,v$$

Se (re)aminteşte expresia funcţiei sinus integral:

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(v)}{v} d\,v \qquad (6.33)$$

Valorile funcţiei Si(x) sunt tabelate, reprezentarea grafică fiind ilustrată în figura 6.3.

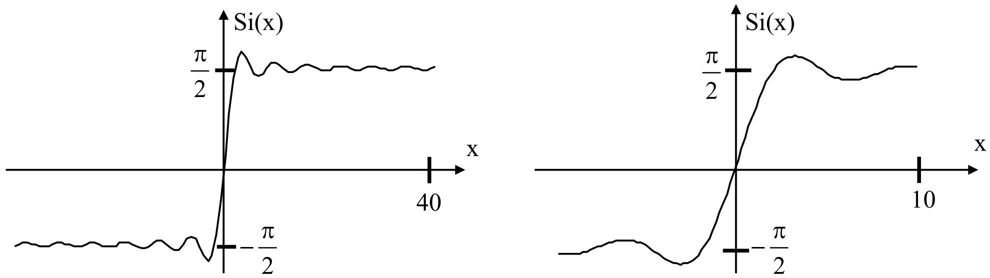


Fig. 6.3: Funcţia sinus integral $\mathrm{Si}(x)$

Conform (6.31) expresia ariei funcţiei de eşantionare devine:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_e(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(v)}{v}dv = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin(v)}{v}dv - \int_0^{-\infty}\frac{\sin(v)}{v}dv\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{Si}(+\infty) - \mathrm{Si}(-\infty)\right] \underset{\mathrm{Si}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}}{\overset{\mathrm{Si}(+\infty)=\frac{\pi}{2}}{=}} \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1$$

În acest caz transformata Fourier a impulsului Dirac devine:

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t)\, e^{-j\omega t}dt$$

Cum funcţia de eşantionare este pară, rezultă:

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t)\, e^{-j\omega t}dt = 2\int_0^{\infty}\frac{k}{\pi}\sin c(kt)\,\cos(\omega t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(kt)}{t}\cos(\omega t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin[(k+\omega)t]}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin[(k-\omega)t]}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin[(k+\omega)t]}{(k+\omega)t}d[(k+\omega)t] + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin[(k-\omega)t]}{(k-\omega)t}d[(k-\omega)t] =$$

$$\overset{\substack{(k+\omega)t=v\\(k-\omega)t=u}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin v}{v}dv + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du = \frac{1}{\pi}\left[2\mathrm{Si}(\infty)\right] = \frac{1}{\pi}\left(2\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

6.3.2. Analiza spectrală a impulsului treaptă unitate

Impulsul treaptă unitate (Heaviside) este definit astfel:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad (6.34)$$

Conform (8.19), acest impuls nu este absolut integrabil. În acest caz, aşa cum s-a afirmat anterior, metoda propusă pentru obţinerea densităţii spectrale este de a calcula transformata Fourier prin trecerea la limită a transformatei unui impuls care este absolut integrabil.

S-a ales ca impuls a cărui transformată se poate calcula, impulsul exponenţial:

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases};\alpha > 0 \qquad (6.35)$$

Conform reprezentării grafice din figura 6.4, se observă că la limită, dacă $\alpha \to 0$, impulsul exponenţial se transformă în impulsul treaptă unitate.

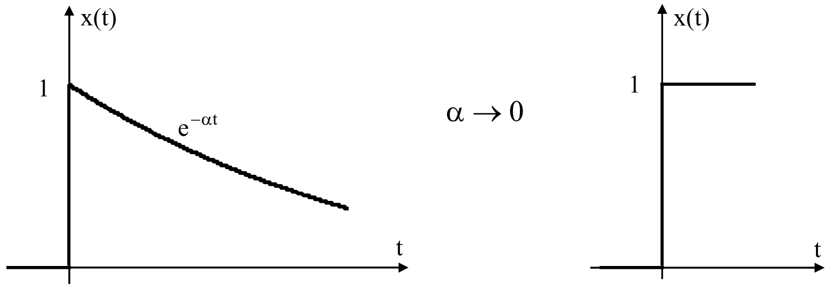


Fig. 6.4: Obţinerea impulsului treptă unitate din impulsul exponenţial

Transformata Fourier a impulsului exponenţial are următoarea expresie:

$$F\{e^{-\alpha t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega) t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j\omega} \qquad (6.36)$$

Se observă că în cazul în care $\omega = 0$, $\lim_{\alpha \to 0}\left(\frac{1}{\alpha + j\omega}\right) = \infty$, ceea ce ar arăta că transformata Fourier a impulsului treaptă unitate nu există.

În acest caz se utilizează scrierea:

$$\frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j\frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Se observă că:

$$\operatorname{Im}_{\omega=0}\left(\frac{1}{\alpha + j\omega}\right) = 0; \ \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \omega \neq 0}} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha + j\omega}\right) = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \omega \neq 0}}\left(-j\frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\right) = \frac{1}{j\omega} \qquad (6.37)$$

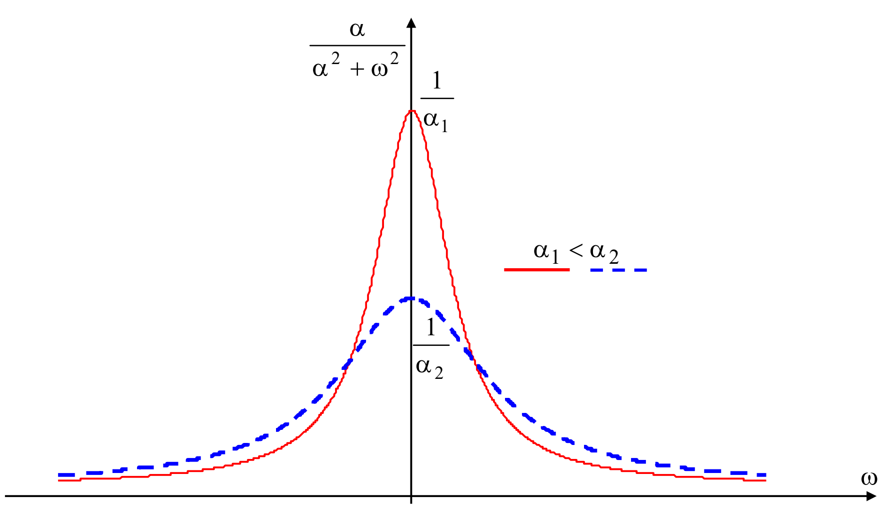


Fig. 6.5: Funcţia $\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

Partea reală a transformatei Fourier a impulsului exponenţial poate fi scrisă ca un impuls a cărui reprezentare grafică este prezentată în figura 6.5. Reprezentarea grafică sugerează că la limită ar putea fi aproximat prin impulsul Dirac ponderat cu o constantă.
Pentru a se demonstra matematic această observaţie se calculează aria impulsului:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\alpha}\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}d\omega\overset{\frac{\omega}{\alpha}=v}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+v^2}dv=\left(\mathrm{arctg}(v)\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}=\pi \qquad (6.38)$$

Cum aria impulsului este o mărime constantă independentă de parametrul α, rezultă că:

$$\lim_{\alpha\to 0}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\alpha+j\omega}\right)=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right)=\pi\delta(\omega) \qquad (6.39)$$

În concluzie, din (6.37) şi (6.39) rezultă că transformata Fourier a impulsului treaptă unitate are expresia:

$$F\{u(t)\}=\lim_{\alpha\to 0}\left[F\{e^{-\alpha t}\}\right]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega} \qquad (6.40)$$

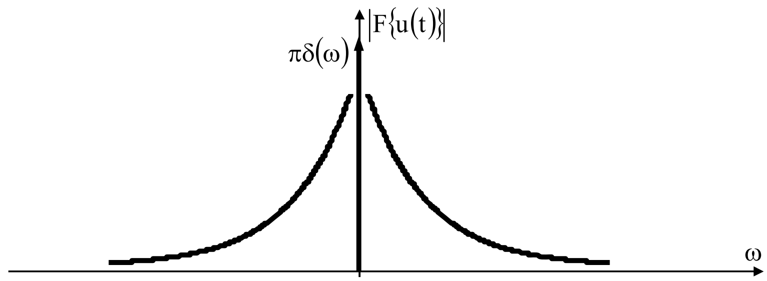


Fig. 6.6: Modulul densităţii spectrale de amplitudine al impulsului treaptă unitate

În literatură se întâleşte şi scrierea:

$$F\{u(t)\}=\begin{cases}\pi\delta(\omega) & \omega=0\\ \frac{1}{j\omega} & \omega\neq 0\end{cases} \qquad (6.41)$$

În figura 6.6 este prezentat modulului densităţii spectrale de amplitudine al impulsului treaptă unitate.

6.3.3. Analiza spectrală a impulsului video

Impulsul video simetric este prezentat în figura 6.7.

1) Expresia matematică a semnalului este următoarea:

$$v_s(t)=\begin{cases}M & \text{dacă } |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & \text{dacă } |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases} \qquad (6.42)$$

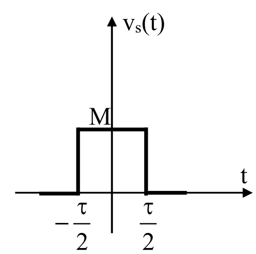


Fig. 6.7: Impulsul video simetric

2) Analiza simetriei semnalului:
Cum $v_s(t)=v_s(-t)\Rightarrow$ vs(t) este o funcţie pară, adică $B(\omega)=0\Rightarrow V_s(j\omega)=A(\omega)$.

3) Calculul funcţiei de densitate spectrală a semnalului, $V_s(j\omega)$:

$$V_s(j\omega)=A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}v_s(t)\cos(\omega t)dt=2M\int_0^{\frac{\tau}{2}}\cos(\omega t)dt=\frac{2M}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}=\tau M\sin c\frac{\omega\tau}{2} \qquad (6.43)$$

4) Calculul modulului densităţii spectrale de amplitudine $|V_s(j\omega)|$:

$$|V_s(j\omega)|=\left|\tau M\sin c\frac{\omega\tau}{2}\right| \qquad (6.44)$$

5) Variaţia modulului densităţii spectrale de amplitudine $|V_s(j\omega)|$ este reprezentată grafic în figura 6.8:

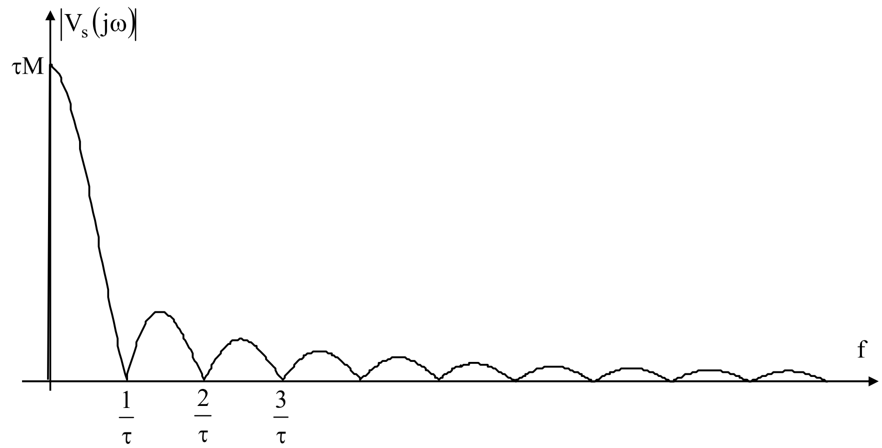


Fig. 6.8: Modulul densităţii spectrale de amplitudine a semnalului video

Observaţie:
În cazul în care se reprezintă funcţia de densitate spectrală a semnalului, se obţine reprezentarea grafică ilustrată în figura 6.9:

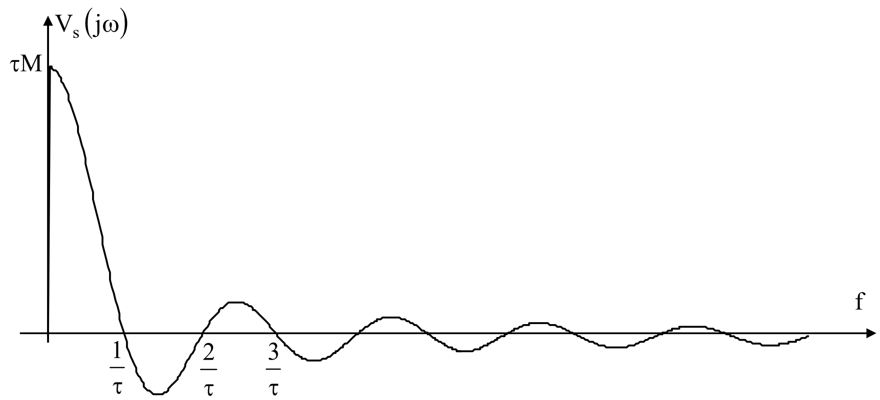


Fig. 6.9: Densitatea spectrală a semnalului video

6) Determinarea lărgimii de bandă, Bv, a semnalului:
În cazul acestui semnal se consideră că lărgimea lui de bandă se întinde de la zero până la prima frecvenţă la care spectrul de amplitudini se anulează.

$$V_s(j\omega) = \tau M \operatorname{sinc}\frac{\omega\tau}{2} = 0 \Rightarrow \sin\frac{\omega\tau}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\omega\tau}{2} = k\pi \Rightarrow \omega = \frac{2k\pi}{\tau} \Rightarrow f = \frac{k}{\tau},\ k \in \mathbf{N}^*$$

Deci, $B_V = \left[0, \frac{1}{\tau}\right][\mathrm{Hz}]$ (6.45)

Observaţii:
- Banda (lărgimea de bandă) depinde doar de durata impulsului;
- Cu cât durata impulsului este mai mare cu atât banda de frecvenţă este mai mică (îngustă) şi amplitudinea spectrală mai mare;
- Cu cât durata impulsului este mai mică cu atât banda de frecvenţă este mai mare (largă) şi amplitudinea spectrală mai mică.

7) Densitatea spectrală de energie a impulsului: $G(\omega) = |V_s(j\omega)|^2 = \tau^2 \operatorname{sinc}^2\frac{\omega\tau}{2}$

Observaţii:
1. Impulsul video nesimetric este prezentat în figura 6.10.

$$v(t)=\begin{cases} M & 0<t<\tau \\ 0 & t>\tau \end{cases}$$

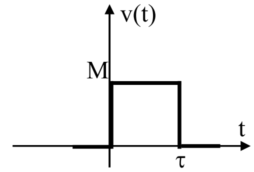


Fig. 6.10: Impulsul video nesimetric

Într-o primă variantă, transformata Fourier a acestui semnal poate fi calculată direct:

$V(j\omega)=A(\omega)-jB(\omega)$ unde:

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\cos(\omega t)dt=\int_{0}^{\tau} M\cos(\omega t)dt=-\frac{M}{\omega}\sin(\omega\tau)$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\sin(\omega t)dt=\int_{0}^{\tau} M\sin(\omega t)dt=-\frac{M}{\omega}(\cos(\omega\tau)-1)$$

iar modulul densităţii spectrale:

$$|V(j\omega)|=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}=\left|\tau M\sin c\frac{\omega\tau}{2}\right|$$

Ar fi mai simplu dacă s-ar utiliza proprietatea transformatei Fourier de întârziere în timp (6.14), aplicată expresiei (6.43) – transformata Fourier a impulsului video simetric, observându-se că $v(t)=v_s\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$ şi deci:

$$V(j\omega)=e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}V_s(j\omega)=e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\tau M\sin c\frac{\omega\tau}{2}\text{, şi cum}$$

$$e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}=\cos\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)-j\sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)\Rightarrow|V(j\omega)|=\left|\tau M\sin c\frac{\omega\tau}{2}\right|$$

Observaţii:

- Modulul densităţii spectrale de amplitudine pentru cele două semnale este identic. Deci oricare două semnale care diferă doar printr-o **întârziere în timp**, au modulele densităţilor spectrale de amplitudine **egale**;
- Banda de frecvenţă pentru cele două semnale este **aceeaşi**;
- Spectrele de fază ale celor două semnale sunt diferite;
- Reprezentarea grafică a modulului densităţii spectrale de amplitudine este identică cu cea din figura 6.8.

2. **Metoda a-2-a** (de obţinere a densităţii spectrale)

Se procedează la o derivare succesivă, punând în evidenţă impulsurile Dirac corespunzătoare derivării discontinuităţilor.

Impulsurile Dirac extrase sunt ignorate când se trece la o nouă derivare (pentru că derivatele lor sunt nule). Procedeul continuă până când derivata respectivă se exprimă ca o sumă de impulsuri Dirac.

Parcurgând apoi drumul în sens invers şi scriind transformatele Fourier ale impulsurilor Dirac, se deduce (pas cu pas) funcţia spectrală căutată.

În figura 6.11 este reprezentat procedeul de evidenţiere a impulsurilor Dirac rezultate în urma derivării impulsului video simetric.

În figura 6.11b se observă că impulsul video simetric poate fi scris ca sumă de impulsuri treaptă unitate, astfel:

$$v_s(t)=Mu\left(t+\frac{\tau}{2}\right)+\left[-Mu\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right] \quad (6.46)$$

Se poate demonstra că derivata unei funcţii într-un punct de discontinuitate este un impuls Dirac, localizat în acel punct şi ponderat cu mărimea discontinuităţii funcţiei (în punctul respectiv). Aplicând această observaţie asupra expresiei (6.46) rezultă:

$$v_s'(t) = M\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)+\left[-M\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right] \tag{6.47}$$

În figura 6.11c se pun în evidenţă impulsurile Dirac ce apar ca urmare a derivării celor două funcţii treaptă unitate.

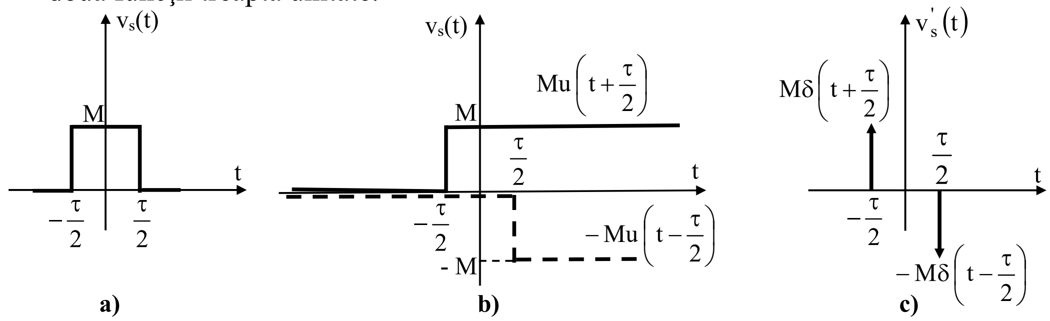


Fig. 6.11: Evidenţierea impulsurilor Dirac în urma derivării impulsului video simetric

Se parcurge drumul în sens invers, aplicând transformatele Fourier derivatei de ordinul I al impulsului video simetric.

$$F\{v_s'(t)\}=M\cdot F\left[\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right]-M\cdot F\left[\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]\overset{(6.13);(6.30)}{=}M\left(e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\right) \tag{6.48}$$

Conform relaţiilor lui Euler (6.1) şi (6.2), (6.48) devine:

$$F\{v_s'(t)\}=2jM\sin\omega\frac{\tau}{2} \tag{6.49}$$

Aplicând proprietatea (6.16) de derivare în timp a transformatei Fourier, rezultă că:

$$F\{v_s(t)\}=V_s(j\omega)=\frac{F\{v_s'(t)\}}{j\omega}=\frac{2jM}{j\omega}\sin\omega\frac{\tau}{2}=\frac{2M}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}=\tau M\sin c\frac{\omega\tau}{2}$$

Această expresie este identică cu cea obţinută în urma aplicării directe a (formulei) transformatei Fourier asupra impulsului video simetric, dar cu calcule mult mai simple.

3. Utilizând rezultatul obţinut pentru transformata Fourier a impulsului video se poate deduce expresia seriei Fourier corespunzătoare impulsului periodic:

$$v_p(t)=\begin{cases}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}v(t-kT_0) & |t-kT_0|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & \text{altfel}\end{cases},$$

unde T_0 este perioada (de repetiţie a) impulsului video (6.42); $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$.

Se scrie SFE ataşată semnalului $v_p(t)$, conform (6.3):

$$v_p(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{n_c}e^{jn\omega_0 t},$$

unde, conform (6.5) şi (6.10):

$$A_{n_c}=\frac{2}{T_0}\int_{T_1}v_p(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{2}{T_0}V(jn\omega_0)=\frac{2M\tau}{T_0}\sin c\frac{n\omega_0\tau}{2}$$

$$v_p(t)=\frac{\tau M}{T_1}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sin c\frac{n\omega_0\tau}{2}e^{jn\omega_0 t}\right]$$

Ţinând cont de (6.4) şi de faptul că că funcţia cos este pară şi sin impară, rezultă expresia:

$$v_p(t) = \frac{\tau M}{T_0}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin c\frac{n\omega_0\tau}{2}\left(\cos(n\omega_0 t) + j\sin(n\omega_0 t)\right)\right] = \frac{\tau M}{T_0}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sin c\frac{n\omega_0\tau}{2}\cos(n\omega_0 t)\right]$$

care se poate constata cu uşurinţă cu e aceeaşi cu cea obţinută în paragraful 5.5.5.

4. Utilizând rezultatul obţinut pentru transformata Fourier a impulsului video se poate deduce expresia transformatei Fourier corespunzătoare „impulsului” constant:

$$x(t) = M \tag{6.50}$$

Conform (6.28), acesta nu este un impuls absolut integrabil, astfel că în acest caz, pentru obţinerea densităţii spectrale se va calcula transformata Fourier prin trecerea la limită a transformatei unui impuls care este absolut integrabil, respectiv a impulsului video simetric.

Conform reprezentării grafice din figura 6.12, se observă că la limită, $\tau \to \infty$, impulsul video simetric se transformă în impuls constant.

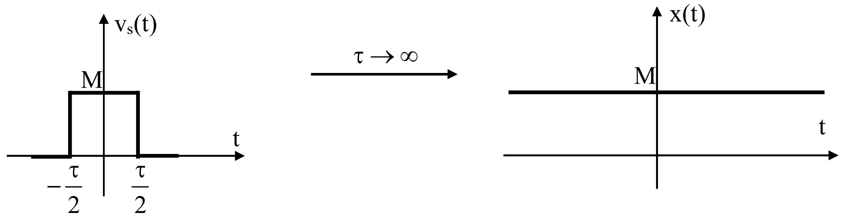


Fig. 6.12: Obţinerea impulsului “constant” din impulsul video simetric

Ţinând cont de (6.43) transformata Fourier a impulsului constant devine:

$$F\{x(t)\} = \lim_{\tau\to\infty}\left[\tau M \sin c\frac{\omega\tau}{2}\right] = 2\pi M \lim_{\tau\to\infty}\left[\frac{\frac{\tau}{2}}{\pi}\sin c\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)\right]$$

Dacă se face notaţia $k = \frac{\tau}{2}$, atunci se obţine:

$$F\{x(t)\} = 2\pi M \lim_{k\to\infty}\left[\frac{k}{\pi}\sin c(k\omega)\right]$$

S-a arătat (în cadrul analizei spectrale a impulsului Dirac) că la limită funcţia de eşantionare, $f_e(\omega) = \frac{k}{\pi}\sin c(k\omega)$, devine impuls Dirac. În consecinţă,

$$F\{x(t)\} = 2\pi M\delta(\omega) \tag{6.51}$$

Reprezentarea grafică a spectrului funcţiei continue este prezentată în figura 6.13.

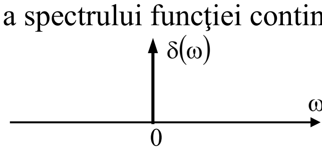


Fig. 6.13: Spectrul funcţiei continue

În continuare se vor prezenta alte două exemple de analiză spectrală (respectiv de terminarea transformatei Fourier) a unor impulsuri “cu discontinuităţi” cu ajutorul proprietăţii (teoremei) de derivare a originalului (proprietatea 5).

6.3.3. Determinarea funcţiei spectrale a impulsului trapezoidal

Să se determine funcţia de densitate spectrală a impulsului din figura 6.14a (generalizarea impulsului video).

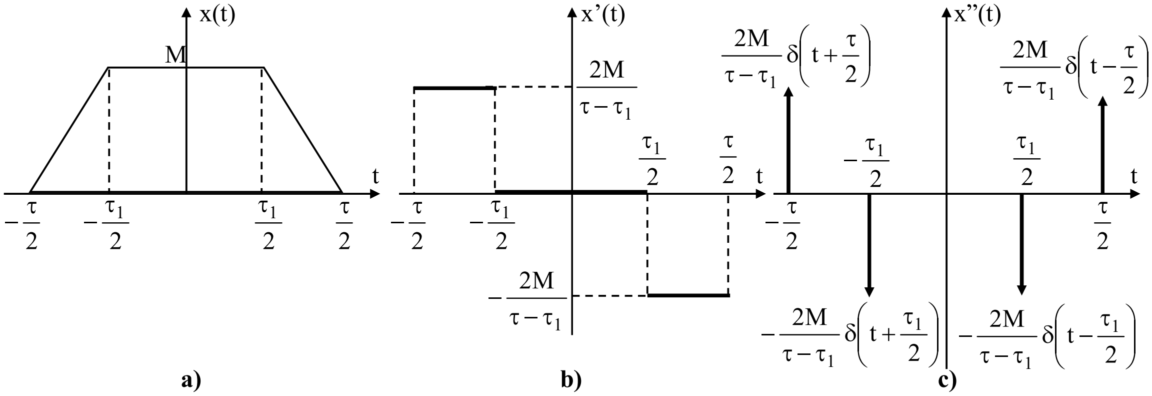


Fig. 6.14: Impulsul trapezoidal simetric

a) forma de undă
b) prima derivată
c) a doua derivată

În figurile 6.14b şi c sunt reprezentate primele două derivate ale semnalului din figura 6.14a. Transformata Fourier a derivatei a doua este:

$$F\left(x''(t)\right)=\frac{2M}{\tau-\tau_1}\left(e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-j\omega\frac{\tau_1}{2}}-e^{j\omega\frac{\tau_1}{2}}+e^{j\omega\frac{\tau}{2}}\right)=\frac{4M}{\tau-\tau_1}\left(\cos\frac{\omega\tau}{2}-\cos\frac{\omega\tau_1}{2}\right)=$$

$$=-\frac{8M}{\tau-\tau_1}\sin\frac{\omega(\tau-\tau_1)}{4}\sin\frac{\omega(\tau+\tau_1)}{4}$$

Cum prin derivările succesive nu s-au "pierdut" impulsuri Dirac, transformata Fourier a semnalului original x(t) se poate calcula direct cu (6.16) – derivarea în timp:

$$F\left(x''(t)\right)=(j\omega)^2X(j\omega)\Rightarrow X(j\omega)=\frac{8M}{\omega^2(\tau-\tau_1)}\sin\frac{\omega(\tau-\tau_1)}{4}\sin\frac{\omega(\tau+\tau_1)}{4}=$$

$$=\frac{2M}{\omega}\sin c\frac{\omega(\tau-\tau_1)}{4}\sin\frac{\omega(\tau+\tau_1)}{4}=$$

$$=\frac{(\tau+\tau_1)M}{2}\sin c\frac{\omega(\tau-\tau_1)}{4}\sin c\frac{\omega(\tau+\tau_1)}{4} \qquad (6.52)$$

<u>Observaţie</u>:

Pentru $\tau_1=\tau$, din figura 14a rezultă că se obţine impulsul video simetric $v_s(t)$, deci ar fi firesc ca şi expresia (6.52) să se transforme în (6.44), adică transformata Fourier $V_s(j\omega)$ a impulsului video simetric:

$$\tau=\tau_1\Rightarrow X(j\omega)=\tau M\underbrace{\sin c(0)}_{1}\sin c\frac{\omega\tau}{2}=\tau M\sin c\frac{\omega\tau}{2}$$

S-a obţinut expresia (6.44), fapt care poate fi interpretat şi ca o corectitudine a calculelor efectuate.

În figura (6.15) s-au reprezentat caracteristicile spectrale de amplitudine în trei situaţii:

- $M=1$, $\tau=1\text{s}$, $\tau_1=\tau$ (impulsul video simetric);
- $M=1$, $\tau=1\text{s}$, $\tau_1=\frac{\tau}{2}$;
- $M=1$, $\tau=1\text{s}$, $\tau_1=\frac{\tau}{8}$.

Se vede cum micşorarea raportului $\frac{\tau_1}{\tau}$ are ca efect atât lărgirea benzii semnalului – efect (eventual) negativ, dar şi micşorarea amplitudinii lobilor secundari – efect pozitiv (desigur, comparativ cu banda, respectiv lobii secundari ai semnalului video simetric).

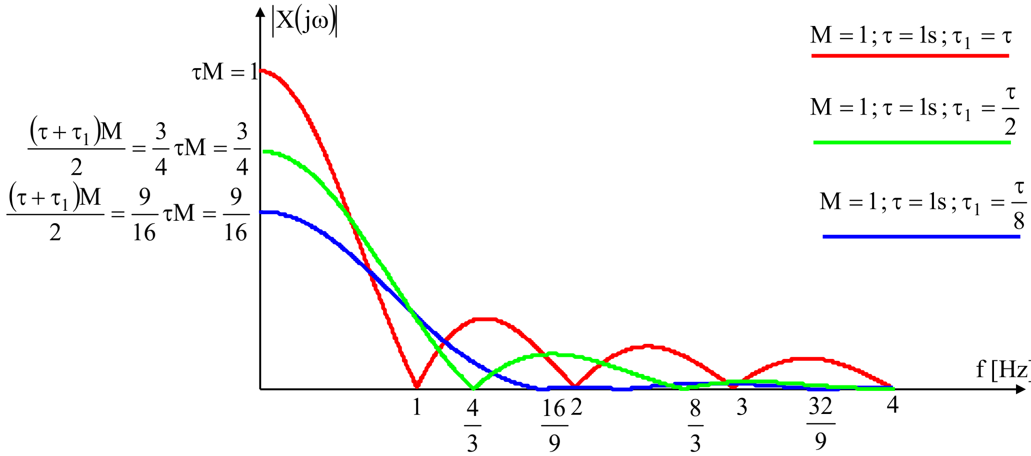


Fig. 6.15: Spectrul de amplitudini al semnalului trapezoidal simetric

Frecvenţele la care se anulează spectrul de amplitudini rezultă imediat:

- Pentru cazul $M = 1$, $\tau = 1s$, $\tau_1 = \tau$ (impulsul video simetric), cum, $\operatorname{sinc}\frac{\omega(\tau-\tau_1)}{4} = 1$, se obţin imediat frecvenţele $f_k = \frac{k}{\tau}, k \in \mathbf{N}^*$, primele 4 fiind reprezentate şi în figura 6.15.
- Pentru cazurile $\tau_1 \neq \tau$, evident că se pot anula ambii factori "sinc" din (6.52), astfel că se obţine:
  - $\frac{\omega_{1_k}(\tau+\tau_1)}{4} = k\pi \Leftrightarrow \omega_{1_k} = \frac{4k\pi}{\tau+\tau_1} \Leftrightarrow f_{1_k} = \frac{\omega_{1_k}}{2\pi} = \frac{2k}{\tau+\tau_1}, k \in \mathbf{N}^*$
  - $\frac{\omega_{2_k}(\tau-\tau_1)}{4} = k\pi \Leftrightarrow \omega_{2_k} = \frac{4k\pi}{\tau-\tau_1} \Leftrightarrow f_{2_k} = \frac{\omega_{2_k}}{2\pi} = \frac{2k}{\tau-\tau_1} > f_{1_k}, k \in \mathbf{N}^*$

  Corespunzător exemplificărilor din figura 6.15, se obţin rezultatele:
  - $\left.\begin{matrix} k = 1 \\ \tau_1 = \frac{\tau}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f_{1_1} = \frac{2}{\tau+\frac{\tau}{2}} = \frac{4}{3}\tau = \frac{4}{3}\text{Hz}; f_{1_2} = \frac{4}{\tau+\frac{\tau}{2}} = \frac{8}{3}\tau = \frac{8}{3}\text{Hz}; \\ f_{2_1} = \frac{2}{\tau-\frac{\tau}{2}} = 4\tau = 4\text{Hz}; f_{2_2} = \frac{4}{\tau-\frac{\tau}{2}} = 8\tau = 8\text{Hz}; \end{cases}$
  - $\left.\begin{matrix} k = 1 \\ \tau_1 = \frac{\tau}{8} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f_{1_1} = \frac{2}{\tau+\frac{\tau}{8}} = \frac{16}{9}\tau = \frac{16}{9}\text{Hz}; f_{1_2} = \frac{4}{\tau+\frac{\tau}{8}} = \frac{32}{9}\tau = \frac{32}{9}\text{Hz} \\ f_{2_1} = \frac{2}{\tau-\frac{\tau}{8}} = \frac{16}{7}\tau = \frac{16}{7}\text{Hz}; f_{2_2} = \frac{4}{\tau-\frac{\tau}{8}} = \frac{32}{7}\tau = \frac{32}{7}\text{Hz} \end{cases}$

În figura 6.15 pot fi observate frecvenţele f_{1_1} şi f_{1_2}, în ambele cazuri: $\tau_1 = \frac{\tau}{2}$; $\tau_1 = \frac{\tau}{8}$.

6.3.4. Determinarea funcţiei spectrale a unui impuls oarecare cu discontinuităţi

Să se facă analiza spectrală a semnalului din figura 6.16a, determinându-i şi banda.

Expresia analitică este: $$x(t) = \begin{cases} 2 & \text{dacă } 0 \le t < 2 \\ -2(t-2)^2 & \text{dacă } 2 \le t < 3 \\ t-5 & \text{dacă } 3 \le t \le 5 \end{cases} \qquad (6.53)$$

Transformata Fourier se va determina prin două metode: prin derivări succesive ca în exemplele anterioare, iar în adoua abordare se va verifica rezultatul obţinut în prima prin determinarea aceleiaşi transformate prin integrare directă.

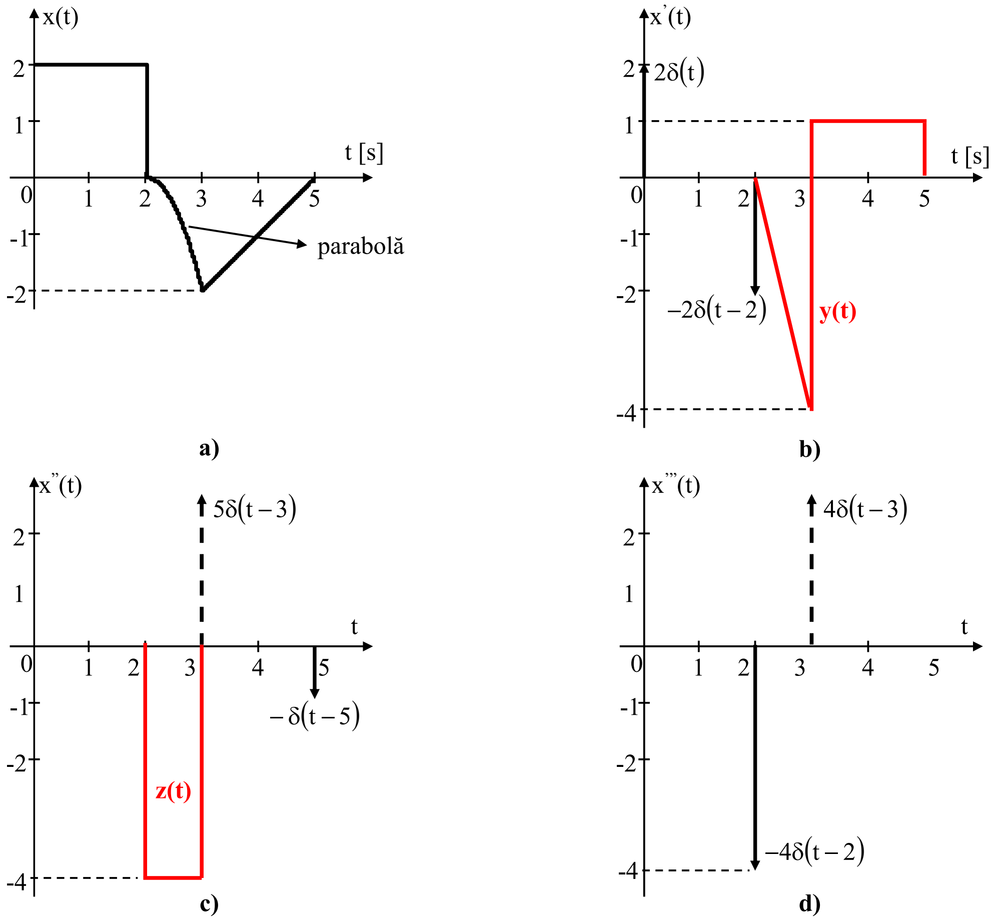


Fig. 6.16: Semnalul de analizat şi derivatele sale:

a) forma de undă a semnalului (6.53);
b) forma de undă a derivatei întâi;
c) forma de undă a derivatei a doua;
d) forma de undă a derivatei a treia.

Metoda I: Aplicarea derivărilor succesive

Expresia primei derivate este evidentă din (6.53), cu observaţia că apar şi impulsurile Dirac din figura 6.16b, corespunzătoare salturilor din origine şi din momentul $t = 2$:

$$x'(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } 0 \le t < 2 \\ -4(t-2) & \text{dacă } 2 < t < 3 \\ 1 & \text{dacă } 3 \le t \le 5 \end{cases}$$

Îinând cont şi de cele două impulsuri Dirac, rezultă:

$$x'(t) = 2\delta(t) - 2\delta(t-2) + y(t) \tag{6.54}$$

unde:

$$y(t) = \begin{cases} -4(t-2) & \text{dacă } 2 < t < 3 \\ 1 & \text{dacă } 3 < t < 5 \end{cases} \tag{6.55}$$

În aceste condiţii, derivata a doua $x''(t)$ este practic prima derivată $y'(t)$ (figura 6.16c):

$$y'(t) = 5\delta(t-3) - \delta(t-5) + z(t) \tag{6.56}$$

în care:

$$z(t)=\begin{cases}-4 & \text{dacă } 2<t<3 \\ 0 & \text{dacă } 3<t<5\end{cases} \tag{6.57}$$

În fine, a treia derivată $x'''(t)$ revine la $z'(t)$, care constă numai în impulsuri Dirac, deci procesul derivărilor successive este finalizat:

$$x'''(t)=z'(t)=-4\delta(t-2)+4\delta(t-3) \tag{6.58}$$

Spre deosebire însă sde cazurile anterioare (în care prin derivările successive **NU S-AU "PIERDUT" IMPULSURI Dirac** şi deci transformata $X(j\omega)$ se putea calcula direct cu proprietatea 5 sau (6.16) a derivării în timp – sau a derivării originalului), în acest caz trebuie determinate succesiv toate transformatele semnalelor introduse în (6.55), …, (6.58), adică la fiecare pas se vor considera şi impulsurile Dirac din relaţiile menţionate mai sus. Concret:

- Se aplică transformata Fourier derivatei $z'(t)$, relaţia (6.58):

  $$F\{z'(t)\}=-4F\{\delta(t-2)\}+4F\{\delta(t-3)\}=4\left(e^{-j3\omega}-e^{-j2\omega}\right) \tag{6.59}$$

  Aplicând proprietatea (6.16) de derivare a originalului, rezultă că:

  $$Z(j\omega)=\frac{F\{z'(t)\}}{j\omega}=\frac{4\left(e^{-j3\omega}-e^{-j2\omega}\right)}{j\omega} \tag{6.60}$$

- Se aplică transformata Fourier derivatei $y'(t)$, relaţia (6.56):

  $$F\{y'(t)\}=Z(j\omega)+5F\{\delta(t-3)\}-F\{\delta(t-5)\}=\frac{4\left(e^{-j3\omega}-e^{-j2\omega}\right)}{j\omega}+5e^{-j3\omega}-e^{-j5\omega} \tag{6.61}$$

  Aplicând iarăşi proprietatea de derivare în timp (6.16), rezultă că:

  $$Y(j\omega)=\frac{F\{y'(t)\}}{j\omega}=\frac{4\left(e^{-j3\omega}-e^{-j2\omega}\right)}{(j\omega)^2}+\frac{5e^{-j3\omega}-e^{-j5\omega}}{j\omega} \tag{6.62}$$

- Se aplică transformata Fourier derivatei $x'(t)$, relaţia (6.54):

  $$\begin{aligned}F\{x'(t)\}&=Y(j\omega)+2F\{\delta(t)\}-2F\{\delta(t-2)\}=\\&=\frac{4\left(e^{-j3\omega}-e^{-j2\omega}\right)}{(j\omega)^2}+\frac{5e^{-j3\omega}-e^{-j5\omega}}{j\omega}+2\left(1-e^{-j2\omega}\right)\end{aligned} \tag{6.63}$$

- În fine, aplicând pentru ultima dată (6.16), rezultă transformata $X(j\omega)$:

  $$X(j\omega)=\frac{F\{x'(t)\}}{j\omega}=\frac{4\left(e^{-j3\omega}-e^{-j2\omega}\right)}{(j\omega)^3}+\frac{5e^{-j3\omega}-e^{-j5\omega}}{(j\omega)^2}+\frac{2\left(1-e^{-j2\omega}\right)}{j\omega} \tag{6.64}$$

Metoda II: **Calculul transformatei Fourier conform definiţiei**

Se aplică transformata Fourier

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\underbrace{\int_0^2 2e^{-j\omega t}dt}_{I_1}-\underbrace{\int_2^3 2(t-2)^2e^{-j\omega t}dt}_{I_2}+\underbrace{\int_3^5 (t-5)e^{-j\omega t}dt}_{I_3}$$

Calculând cele trei integrale, se obţine:

$$I_1=2\int_0^2 e^{-j\omega t}dt=-2\left(\left.\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\right|_0^2\right)=\frac{2}{j\omega}\left(1-e^{-j2\omega}\right);$$

$$I_2=-2\int_2^3(t-2)^2e^{-j\omega t}dt\underset{t-2=u}{=}=-2\int_0^1 u^2e^{-j\omega(u+2)}du=-2e^{-j2\omega}\int_0^1 u^2\frac{\left(e^{-j\omega u}\right)'}{-j\omega}du=$$

$$=\frac{2e^{-j2\omega}}{j\omega}\left[\left(\left.u^2e^{-j\omega u}\right|_0^1\right)+\frac{2}{j\omega}\int_0^1 u\left(e^{-j\omega u}\right)'du\right]=\frac{2e^{-j2\omega}}{j\omega}\left[e^{-j\omega}+\frac{2}{j\omega}\left(\left(\left.ue^{-j\omega u}\right|_0^1\right)+\frac{1}{j\omega}\int_0^1\left(e^{-j\omega u}\right)'du\right)\right];$$

$$I_2=\frac{2e^{-j3\omega}}{j\omega}+\frac{4e^{-j3\omega}}{(j\omega)^2}+\frac{4e^{-j3\omega}-4e^{-j2\omega}}{(j\omega)^3}$$

$$I_3=\int_3^5 (t-5)e^{-j\omega t}dt \underset{t-5=u}{=} \int_{-2}^{0} ue^{-j\omega(u+5)}du=-\frac{e^{-j5\omega}}{j\omega}\int_{-2}^{0} u\left(e^{-j\omega u}\right)'du=$$

$$=-\frac{e^{-j5\omega}}{j\omega}\left[ue^{-j\omega u}\Big|_{-2}^{0}+\frac{1}{j\omega}\int_{-2}^{0}\left(e^{-j\omega u}\right)'du\right]=-\frac{e^{-j5\omega}}{j\omega}\left[2e^{j2\omega}+\frac{1-e^{j2\omega}}{j\omega}\right]=\frac{e^{-j3\omega}-e^{-j5\omega}}{(j\omega)^2}-\frac{2e^{-j3\omega}}{j\omega}$$

Prin sumarea rezultatelor obţinute pentru cele trei integrale se obţine transformata Fourier:

$$X(j\omega)=I_1+I_2+I_3=\frac{2}{j\omega}\left(1-e^{-j2\omega}\right)+\frac{2e^{-j3\omega}}{j\omega}+\frac{4e^{-j3\omega}}{(j\omega)^2}+\frac{4e^{-j3\omega}-4e^{-j2\omega}}{(j\omega)^3}+\frac{e^{-j3\omega}-e^{-j5\omega}}{(j\omega)^2}-\frac{2e^{-j3\omega}}{j\omega}$$

Efectuând calculele, se (re)obţine (reconfirmă) (6.64):

$$X(j\omega)=\frac{2\left(1-e^{-j2\omega}\right)}{j\omega}+\frac{4\left(e^{-j3\omega}-e^{-j2\omega}\right)}{(j\omega)^3}+\frac{5e^{-j3\omega}-e^{-j5\omega}}{(j\omega)^2}$$

Comentariile sunt de prisos!

Pentru analiza spectrală a acestui semnal (observaţie: transformata fiind complexă, se poate pune şi problema studiului caracteristicii de fază), evident că se impune puţină trigonometrie asupra transformatei $X(j\omega)$. Se vor analiza cei trei termeni ai transformatei (6.64) individual:

- $\frac{4\left(e^{-j3\omega}-e^{-j2\omega}\right)}{(j\omega)^3}=4j\frac{e^{-j3\omega}-e^{-j2\omega}}{\omega^3}=4\frac{\sin(3\omega)-\sin(2\omega)}{\omega^3}+j4\frac{\cos(3\omega)-\cos(2\omega)}{\omega^3}$
- $\frac{5e^{-j3\omega}-e^{-j5\omega}}{(j\omega)^2}=\frac{5e^{-j3\omega}-e^{-j5\omega}}{-\omega^2}=\frac{\cos(5\omega)-5\cos(3\omega)}{\omega^2}+j\frac{5\sin(3\omega)-\sin(5\omega)}{\omega^2}$
- $\frac{2\left(1-e^{-j2\omega}\right)}{j\omega}=j2\frac{e^{-j2\omega}-1}{\omega}=j2\frac{\cos(2\omega)-1-j\sin(2\omega)}{\omega}=2\frac{\sin(2\omega)}{\omega}-j4\frac{\sin^2(\omega)}{\omega}$

Cu acestea, expresia transformatei Fourier devine:

$$X(j\omega)=\frac{8\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{5\omega}{2}\right)+\omega(\cos(5\omega)-5\cos(3\omega))+2\omega^2\sin(2\omega)}{\omega^3}+$$
$$+j\frac{\omega(5\sin(3\omega)-\sin(5\omega))-4\omega^2\sin^2(\omega)-8\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\omega^3}\qquad(6.65)$$

Se obţin astfel următoarele expresii ale caracteristicilor spectrale):

- Caracteristica de amplitudine, $A(\omega)=|X(j\omega)|$:

$$A(\omega)=\frac{\sqrt{\left(8\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{5\omega}{2}\right)+\omega(\cos(5\omega)-5\cos(3\omega))+2\omega^2\sin(2\omega)\right)^2+\left(\omega(5\sin(3\omega)-\sin(5\omega))-4\omega^2\sin^2(\omega)-8\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)\right)^2}}{\omega^3}\qquad(6.66)$$

- Caracteristica de fază, $\varphi(\omega)=\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}(X(j\omega))}{\mathrm{Re}(X(j\omega))}$:

$$\varphi(\omega)=\mathrm{arctg}\frac{\omega(5\sin(3\omega)-\sin(5\omega))-4\omega^2\sin^2(\omega)-8\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{8\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{5\omega}{2}\right)+\omega(\cos(5\omega)-5\cos(3\omega))+2\omega^2\sin(2\omega)}\qquad(6.67)$$

Cele două caracteristici sunt reprezentate grafic în figura 6.17.

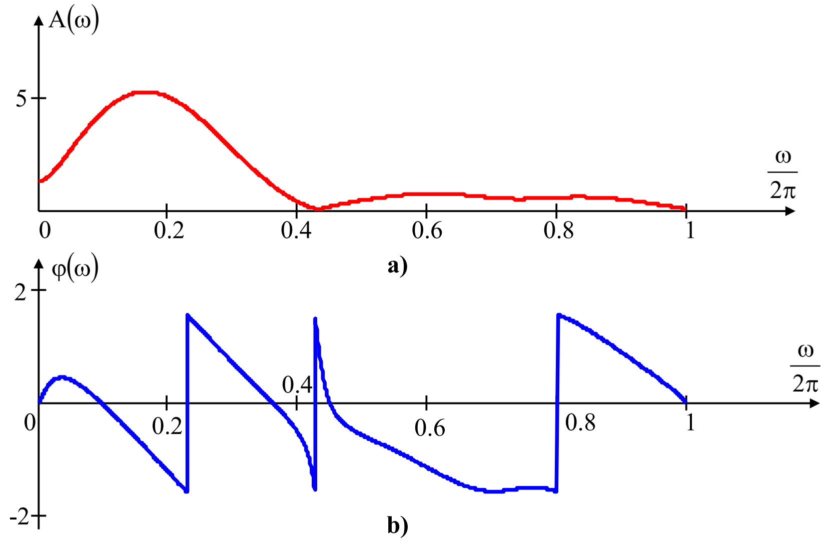


Fig. 6.17: Caracteristicile spectrale ale semnalului din figura 6.16a

a) spectrul de amplitudini;
b) spectrul de faze.

Caracteristica de amplitudine $A(\omega)$ nu se anulează, deci banda semnalului se poate lua de la zero la primul minim, în jurul frecvenţei de 0,45Hz în figura 16.17a: $B = [0;0,45]\text{Hz}$.

<u>Observaţie</u>:

Problema poate fi rezolvată (şi) cu ajutorul unor software matematice, ca de exemplu MathCAD sau Matlab. De exemplu, figura 6.17a reprezintă o captură a graficului obţinut implementând în MathCAD relaţiile (6.64) sau (6.66) (în cazul relaţiei (6,64) se reprezintă grafic modulul); pentru figura 6.17 s-a reprezentat grafic în MathCAD relaţia (6.67).

Acelaşi lucru se poate obţine şi cu ajutorul următorului script Matlab:

```
syms omega %se defineste variabila simbolica omega
%Se defineste simbolic transformata X(j*omega), conform (6.64)
X=2*(1-exp(-1i*2*omega))/1i/omega+4*(exp(-1i*3*omega)...
    -exp(-1i*2*omega))/(1i*omega)^3+(5*exp(-1i*3*omega)...
    -exp(-1i*5*omega))/(1i*omega)^2;
X0=limit(X,omega,0); % se calculeaza limita transformatei in 0
%Se introduc si apoi se ploteaza caracteristicile sub forma exponentialelor
complexe
clearvars
omegamin=0;
omegamax=4*pi;
N=omegamax*100/pi; %cate 100 puncte pe fiecare interval cu lungimea pi
for i=1:N+1
    omega(i)=omegamin+(i-1)*(omegamax-omegamin)/N;
    if omega(i)==0
     X(i)=4/3; % valoarea limitei returnata de sectiunea de calcul simbolic
    else
     X(i)=2*(1-exp(-1i*2*omega(i)))/1i/omega(i)+...
          4*(exp(-1i*3*omega(i))-exp(-1i*2*omega(i)))/(1i*omega(i))^3+...
          (5*exp(-1i*3*omega(i))-exp(-1i*5*omega(i)))/(1i*omega(i))^2;
    end
    fi(i)=angle(X(i));
end
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(omega/2/pi,abs(X))
subplot(2,1,2)
plot(omega/2/pi,fi);
```

După rulare se obţin grafice asemănătoare cu cele din figura 6.17.

6.3.5. Sinus redresat (mono sau dublă alternanţă) neperiodic

Semnalul este reprezentat în figura 6.18a. Expresia sa analitică este:

$x(t) = U\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)$; $0 < t < T$, perioada sinusoidei neredresate fiind 2T.

Prin schimbarea de variabilă:

$$\tau = t - \frac{T}{2} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{T}{2} < \tau < \frac{T}{2} \\ dt = d\tau \\ t = \tau + \frac{T}{2} \end{cases},$$

semnalul devine par, fiind reprezentat şi grafic în figura 6.18b. Rezultă densitatea spectrală:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} x(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau = 2U\int_{0}^{\frac{T}{2}} \sin\left[\frac{\pi}{T}\left(\tau + \frac{T}{2}\right)\right]\cos(\omega\tau)d\tau =$$

$$= 2U\int_{0}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)\cos(\omega\tau)d\tau = U\int_{0}^{\frac{T}{2}} \cos\left[\left(\frac{\pi}{T} + \omega\right)\tau\right]d\tau + U\int_{0}^{\frac{T}{4}} \cos\left[\left(\frac{\pi}{T} - \omega\right)\tau\right]d\tau$$

Dacă se notează $\omega_0 := \frac{\pi}{T}$ (pulsaţia sinusoidei din care s-a extras semnalul x(t)), atunci se obţine succesiv::

$$X(j\omega) = \frac{U}{\frac{\pi}{T} + \omega}\sin\left[\left(\frac{\pi}{T} + \omega\right)\tau\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{U}{\frac{\pi}{T} - \omega}\sin\left[\left(\frac{\pi}{T} - \omega\right)\tau\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}$$

$$X(j\omega) = \frac{U}{\frac{\pi}{T} + \omega}\sin\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\omega T}{2}\right] + \frac{U}{\frac{\pi}{T} - \omega}\sin\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\omega T}{2}\right]$$

$$X(j\omega) = U\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\left(\frac{1}{\frac{\pi}{T} + \omega} + \frac{1}{\frac{\pi}{T} - \omega}\right) = \frac{2\pi}{T}U\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\frac{1}{\frac{\pi^2}{T^2} - \omega^2}$$

$$|X(j\omega)| = 2\pi UT\left|\frac{\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\pi^2 - \omega^2 T^2}\right| \qquad (6.68)$$

Pentru calculul benzii, trebuie rezolvată ecuaţia $X(j\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \frac{(2k+1)\pi}{T}$.

Mai întâi însă se observă că în cazul $k = 0$ apare o nedeterminare:

$$k = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{T} \Rightarrow \left|X\left(j\frac{\pi}{T}\right)\right| \overset{\frac{0}{0}}{=} 2U\pi T\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\frac{T}{2}}{2\omega T^2}\Bigg|_{\omega=\frac{\pi}{T}} = \frac{UT}{2}.$$

Caracteristica spectrală de amplitudine este reprezentată în figura 6.18c.

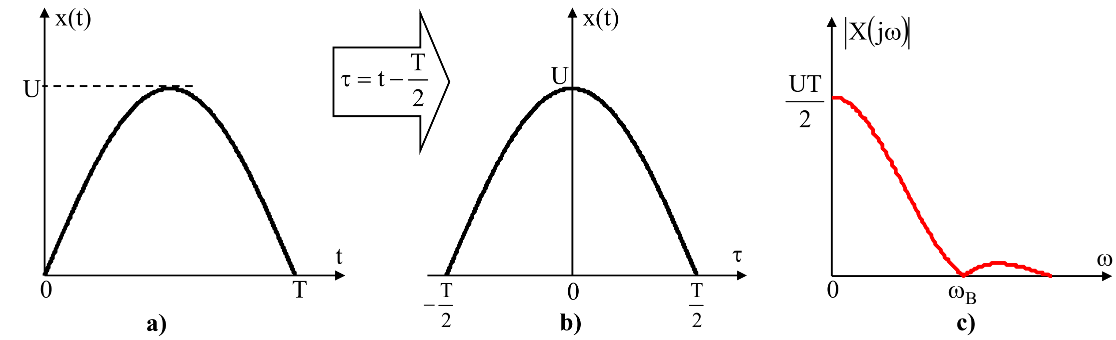


Fig. 6.18: Caracteristicile semnalului „sinus redresat”

a) forma de undă;
b) simetrizarea formei de undă (schimbarea de variabilă);
c) caracteristica spectrală de amplitudine;

Rezultă că lărgimea benzii este $\omega_B = \frac{3\pi}{T}$, respectiv $f_B = \frac{3}{2T}$.

<u>Observaţie</u>:

În titlu practic s-a afirmat că indiferent că semnalul sinusoidal este redresat mono sau dublă alternanţă, spectrul semnalului neperiodic este acelaşi. Se va verifica această afirmaţie, determinând SFE şi apoi SFA ale celor două semnale, considerate periodice.

Se scrie SFE ataşată semnalului x(t), conform (6.3): $x(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n_c} e^{jn\omega_0 t}$,

unde, în conformitate cu (6.5) şi (6.10): $A_{n_c} = \frac{2}{T_0} X(jn\omega_0)$, unde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

- În cazul semnalului sinusoidal redresat dublă alternanţă periodic, este evident că $T_0 = T$, astfel că se obţine:

$$A_{n_c} = \frac{2}{T}\cdot\frac{2\pi}{T} U\cos\left(\frac{n\omega_0 T}{2}\right)\frac{1}{\frac{\pi^2}{T^2} - (n\omega_0)^2} = \frac{4\pi U}{T^2}\cdot\frac{T^2\cos(n\pi)}{\pi^2(1-4n^2)} = (-1)^{n+1}\frac{4U}{\pi(4n^2-1)}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4U}{\pi(4n^2-1)}\left(\cos(n\omega_0 t) + j\sin(n\omega_0 t)\right) = \\ = \frac{2U}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4U}{\pi(4n^2-1)}\cos(n\omega_0 t)$$,

  rezultat identic cu cel obţinut prin calculul “clasic” al SFT, respectiv SFA

- În cazul semnalului sinusoidal redresat mono alternanţă periodic, este evident că $T_0 = 2T$, deci $\omega_0 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$, astfel că se obţine:

$$A_{n_c} = \frac{2}{2T}\cdot\frac{2\pi}{T} U\cos\left(\frac{n\omega_0 T}{2}\right)\frac{1}{\frac{\pi^2}{T^2} - (n\omega_0)^2} = \frac{2\pi U}{T^2}\cdot\frac{T^2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi^2(1-n^2)} = \\ = \begin{cases} (-1)^k \frac{2U}{\pi(1-n^2)} & \text{dacă } n = 2k \\ 0 & \text{dacă } n = 2k+1 \end{cases}$$,

  Cu excepţia cazului $n = \pm 1$, când apare o nedeterminare. Pentru acest caz se obţine:

$$A_{\pm 1_c} = \frac{2U}{\pi}\cdot \lim_{n\to\pm 1}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{1-n^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{2U}{\pi}\cdot \lim_{n\to\pm 1}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{-2n}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{U}{2}$$

Se obţine astfel SFE, respectiv SFA:

$$x(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n_c}\left(\cos(n\omega_0 t) + j\sin(n\omega_0 t)\right) = \frac{U}{\pi} - \frac{U}{2}\cos(\omega_0 t)$$

$$= \frac{2U}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4U}{\pi(4n^2-1)}\cos(\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{U}{\pi(1-4k^2)}\cos(2k\omega_0 t),$$

rezultat „aproape” identic cu cel obţinut prin calculul “clasic” al SFT, respectiv SFA. Apar unele diferenţe la semnele coeficienţilor C_n, dar armonicile $A_n = |C_n|$ sunt aceleaşi. Explicaţia constă în faptul că la calculul transformatei Fourier am simetrizat semnalul, dar nu şi la calculul direct al SFT/SFA. După cum s-a menţionat la Analiza armonică a semnalelor periodice, translaţiile pe abscisă nu afectează spectrul de amplitudini, ci numai pe cel de faze. Rezultă că semnalul x(t) dedus aici va avea alt spectru de faze faţă de cel obţinut prin analiza Fourier “clasică”.

Faptul că s-au regăsit rezultatele de la SFA a semnalelor sinus redresat dublă/mono alternanţă vine să confirme afirmaţia că din punctual de vedere al semnalului neperiodic, cele două spectre coincide.

În încheiere se vor prezenta analizele spectrale ale unor semnale cu aplicaţii importante în domeniul radiolocaţiei, respectiv semnalul (sau impulsul) radio şi altele, derivate din acesta. Se face precizarea că în esenţă o instalaţie de radiolocaţie se compune din două blocuri mari:

- Emiţătorul, care generează şi emite în spaţiu semnalul de sondaj, care este de tipul celor ce vor fi prezentate în continuare (impuls radio);
- Receptorul , care recepţionează semnalul ecou (reflectat de ţintă) şi care are rolul de a stabili distanţa până la ţintă. Deci, semnalul ecou (prezumat a fi semnalul de sondaj reflectat de ţintă) va fi demodulat (proces prin care se obţine un semnal video) şi apoi, cu ajutorul unui procedeu numit (auto)corelaţie se poate determina distanţa.

Cu alte cuvinte, absolut esenţiale în radiolocaţie sunt semnalele de tip video (deja analizate) şi cele de tip radio, ce vor fi prezentate în continuare.

6.3.6. Analiza spectrală a impulsului radio

Expresia matematică a semnalului (impuls) radio (singular şi cosinusoidal) este următoarea:

$$c_s(t) = \begin{cases} M\cos(\omega_0 t) & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}, \qquad (6.69)$$

unde $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} << \frac{\tau}{2}$

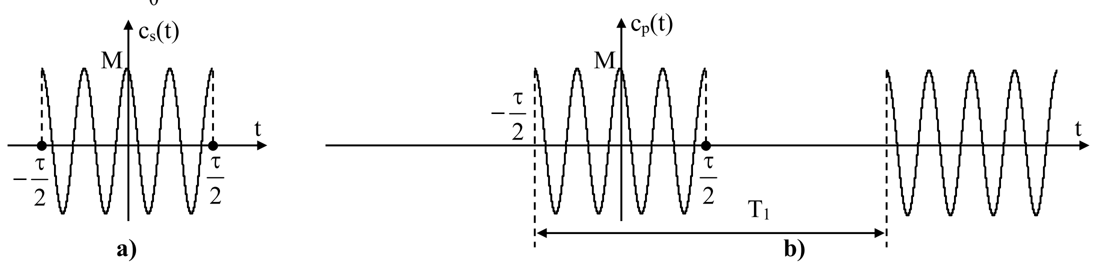


Fig. 6.19: Impulsul radio cosinusoidal

a) singular
b) periodic

Se poate observa că semnalul $c_s(t)$ se poate scrie sub forma $c_s(t) = v_s(t)\cos(\omega_0 t)$, unde $v_s(t)$ este impulsul video simetric de lăţime τ (6.42). Impulsul radio (figura 6.19a) reprezintă "decuparea" unei perioade a semnalului cosinusoidal (periodic) – figura 6.19b.

Se poate scrie că $c_s(t) = v_s(t)\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} v_s(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} v_s(t) e^{-j\omega_0 t}$

Folosind proprietatea (6.15) - de deplasare a spectrului (modularea), se obţine că:

$$F^{-1}\{X(j(\omega-\omega_0))\} = e^{-j\omega_0 t} x(t) \Leftrightarrow X(j(\omega-\omega_0)) = F\{e^{-j\omega_0 t} x(t)\}$$

Cum $F\{x(t)\} = X(j\omega)$ şi $x(t) = v_s(t)$, se obţine:

$$\begin{aligned} C_s(j\omega) &= \frac{1}{2} V_s[j(\omega-\omega_0)] + \frac{1}{2} V_s[j(\omega+\omega_0)] = \\ &= \frac{\tau M}{2}\left(\sin c \frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2} + \sin c \frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}\right) \\ |C_s(j\omega)| &= \frac{\tau M}{2}\left|\sin c \frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2} + \sin c \frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}\right| \end{aligned} \tag{6.70}$$

Spectrul de amplitudini al impulsului radio este centrat în jurul pulsaţiilor ω_0 şi $-\omega_0$. Cum pulsaţiile negative nu sunt realizabile practic, rezultă că spectrul este axat în jurul pulsaţiei ω_0, după cum se poate observa şi în figura 6.20, din care se poate observa şi că banda impulsului radio este de două ori mai largă decât banda impulsului video:

$$B_r = 2B_V = \frac{2}{\tau} \tag{6.71}$$

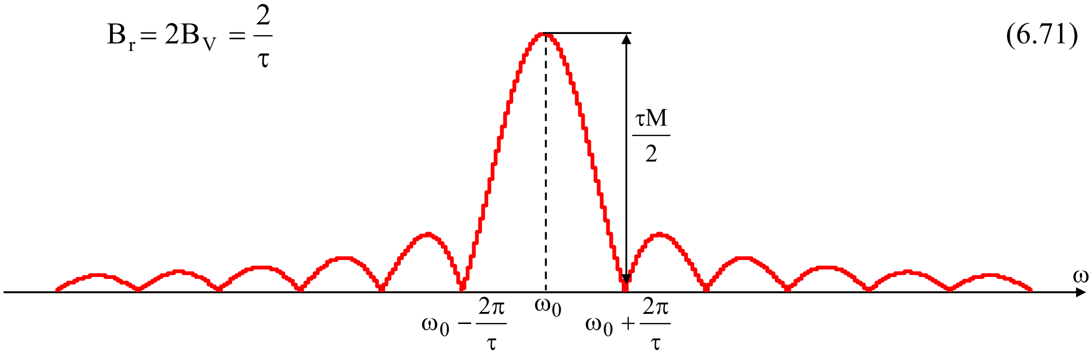


Fig. 6.20: Spectrul de amplitudini al impulsului radio cosinusoidal

Observaţii:

1. Utilizând rezultatul obţinut pentru transformata Fourier a impulsului radio (singular şi cosinusoidal) se poate deduce expresia seriei Fourier corespunzătoare semnalului periodic:

$$c_p(t) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_s(t-kT_1)\cos(\omega_0 t) & |t-kT_1| < \frac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

   unde T_1 este perioada (de repetiţie a) semnalului radio (6.69); $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$.

   Se scrie SFE ataşată semnalului $c_p(t)$, conform (6.3):

$$c_p(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n_c} e^{jn\omega_1 t},$$

   unde, conform (6.5):

$$A_{n_c} = \frac{2}{T_1}\int_{T_1} c_p(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{2}{T_1} C_s(jn\omega_1) = \frac{\tau M}{T_1}\left(\sin c \frac{(n\omega_1 - \omega_0)\tau}{2} + \sin c \frac{(n\omega_1 + \omega_0)\tau}{2}\right)$$

$$c_p(t)=\frac{\tau M}{T_1}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sin c\frac{(n\omega_1-\omega_0)\tau}{2}+\sin c\frac{(n\omega_1+\omega_0)\tau}{2}\right)e^{jn\omega_1 t}\right]$$

În figura 6.21 se prezintă spectrul de amplitudini al semnalului radio (cosinusoidal) periodic. Se poate observa că acesta este discret, având drept înfăşurătoare spectrul impulsului radio din figura 6.20.

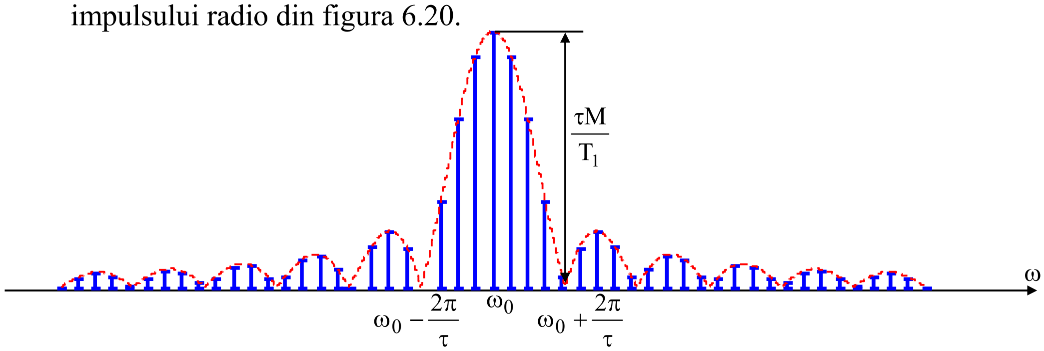


Fig. 6.21: Spectrul de amplitudini al semnalului radio (cosinusoidal) periodic

2. Utilizând rezultatul obţinut pentru transformata Fourier a impulsului radio (singular şi cosinusoidal) se poate deduce expresia transformatei Fourier corespunzătoare „impulsului" cosinusoidal continuu:

Semnalul cosinusoidal este definit astfel:

$$x_C(t)=\cos\omega_0 t,\qquad t\in(-\infty,\infty)\tag{6.72}$$

Deoarece semnalul nu este absolut integrabil, se construieşte un semnal pentru care se poate aplica transformata Fourier. Acest semnal, absolut integrabil, este (6.69), a cărui transformată Fourier este (6.70), în care $M=1$. Rezultă că:

$$F\{x_C(t)\}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{2}\left[\sin c\left(\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\right)+\sin c\left(\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}\right)\right]=$$
$$=\pi\lim_{\tau\to\infty}\left[\frac{\tau}{2\pi}\sin c\left(\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\right)+\frac{\tau}{2\pi}\sin c\left(\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}\right)\right]$$

S-a arătat (în cadrul analizei spectrale a impulsului Dirac) că la limită funcţiile de eşantionare,

$$f_e(\omega-\omega_0)=\frac{\frac{\tau}{2}}{\pi}\sin c\left((\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}\right),\text{ sau }f_e(\omega+\omega_0)=\frac{\frac{\tau}{2}}{\pi}\sin c\left((\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}\right)$$

devin impulsuri Dirac.

În consecinţă,

$$F\{x_C(t)\}=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)\tag{6.73}$$

Reprezentarea grafică a spectrului impulsului cosinusoidal este prezentată în figura 6.22b.

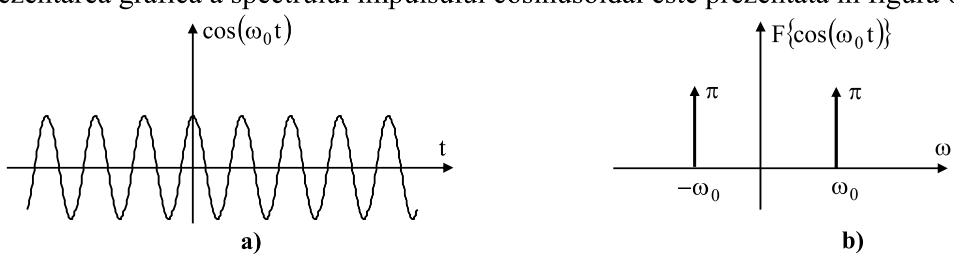


Fig. 6.22: Semnalul cosinusoidal

a) Reprezentarea în timp a semnalului cosinusoidal $\cos\omega_0 t$

b) Funcţia de densitate spectrală a semnalului cosinusoidal $\cos\omega_0 t$

3. În mod analog se poate proceda pentru impulsul radio sinusoidal, definit astfel:

$$s_s(t)=\begin{cases} x_v(t)\sin(\omega_0 t) & |t|<\dfrac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{altfel} \end{cases} \tag{6.74}$$

unde $T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}<<\dfrac{\tau}{2}$

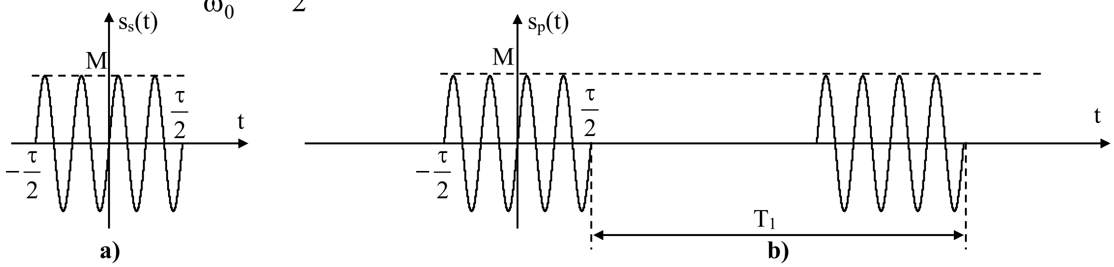


Fig. 6.23: Impulsul radio sinusoidal

a) singular
b) periodic

3.1. Pentru "segmentul" de semnal sinusoidal transformata Fourier are expresia:

$$S_s(j\omega)=A\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\sin(\omega_0 t)e^{-j\omega t}dt\overset{(6.2)}{=}\frac{A}{2j}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\left(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}\right)e^{-j\omega t}dt=$$

$$=\frac{A}{2j}\left[\frac{e^{j(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}}-e^{-j(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}}}{j(\omega-\omega_0)}-\frac{e^{j(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}}-e^{-j(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}}}{j(\omega+\omega_0)}\right]\overset{(6.1)}{=}$$

$$=\frac{A}{j}\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}}{(\omega-\omega_0)}-\frac{\sin(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}}{(\omega+\omega_0)}\right]=$$

$$=j\frac{\tau A}{2}\left[\sin c\left((n\omega_1+\omega_0)\frac{\tau}{2}\right)-\sin c\left((n\omega_1-\omega_0)\frac{\tau}{2}\right)\right] \tag{6.75}$$

Prin comparaţie cu modul de lucru utilizat în cazul impulsului radio cosinusoidal, se poate observa simplificarea calculelor oferită de aplicarea proprietăţilor transformatei Fourier faţă de calculul direct.

Din analiza expresiei (6.75) se poate observa că spectrul de amplitudini $|S_s(j\omega)|$ este identic cu cel al impulsului radio cosinusoidal, prezentat în figura 6.20.

3.2. Utilizând rezultatul obţinut pentru transformata Fourier a impulsului radio (singular şi sinusoidal) se poate deduce expresia seriei Fourier corespunzătoare impulsului periodic (figura 6.23b):

$$s_p(t)=\begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}x_v(t-kT_1)\sin(\omega_0 t) & |t-kT_1|<\dfrac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

unde T_1 este perioada (de repetiţie a) impulsului radio (6.74); $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}$.

Se scrie SFE ataşată semnalului $s_p(t)$, conform (6.3):

$$s_p(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{n_c}e^{jn\omega_1 t},$$

unde, conform (6.5):

$$A_{n_c} = \frac{2}{T_1}\int_{T_1} s_p(t)e^{-jn\omega_1 t}dt = \frac{2}{T_1}S_s(jn\omega_1) =$$

$$= j\frac{\tau A}{T_1}\left[\sin c\left((n\omega_1+\omega_0)\frac{\tau}{2}\right) - \sin c\left((n\omega_1-\omega_0)\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

$$s_p(t) = j\frac{\tau A}{2T_1}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sin c\left((n\omega_1+\omega_0)\frac{\tau}{2}\right) - \sin c\left((n\omega_1-\omega_0)\frac{\tau}{2}\right)\right)e^{jn\omega_1 t}\right]$$

Spectrul de amplitudini al semnalului radio sinusoidal periodic este acelaşi cu cel din figura 6.21, corespunzător semnalului radio cosinusoidal periodic.

3.3. Utilizând rezultatul obţinut pentru transformata Fourier a impulsului radio (singular şi sinusoidal) se poate deduce expresia transformatei Fourier corespunzătoare „impulsului" sinusoidal continuu (figura 6.24a):

Semnalul sinusoidal este definit astfel:

$$x_S(t) = \sin\omega_0 t, \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{6.76}$$

Deoarece semnalul nu este absolut integrabil, se construieşte un semnal pentru care se poate aplica transformata Fourier. Acest semnal, absolut integrabil, este (6.74), a cărui transformată Fourier este (6.75), în care $M = 1$. În consecinţă:

$$F\{x_S(t)\} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{j\tau}{2}\left[\sin c\left((\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}\right) - \sin c\left((\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}\right)\right] =$$

$$= j\pi\lim_{\tau\to\infty}\left[\frac{\frac{\tau}{2}}{\pi}\sin c\left((\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}\right) - \frac{\frac{\tau}{2}}{\pi}\sin c\left((\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

Ca şi la impulsul cosinusoidal, se obţine:

$$F\{x_S(t)\} = j\pi\delta(\omega+\omega_0) - j\pi\delta(\omega-\omega_0) \tag{6.77}$$

În figura 6.24b se poate vedea reprezentarea grafică a spectrului impulsului sinusoidal.

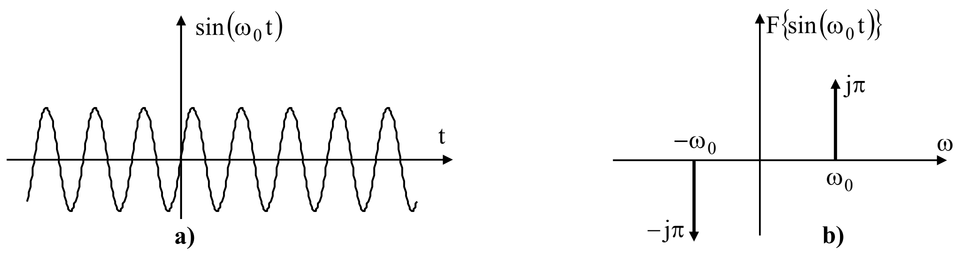


Fig. 6.24: Semnalul sinusoidal

a) Reprezentarea în timp a semnalului sinusoidal $\sin\omega_0 t$

b) Funcţia de densitate spectrală a semnalului sinusoidal $\sin\omega_0 t$

<u>Observaţie</u>:

Semnale cu spectru de tip trece bandă (semnalul radio e un prim exemplu)!!!

Chirp!!!

7. CONVOLUȚIA SEMNALELOR ANALOGICE

Se numeşte funcție (produs) de convoluție în timp a semnalelor $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ integrala:

$$x(t) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)d\tau \qquad (7.1)$$

Notația consacrată a produsului de convoluție în timp este următoarea:

$$x(t) \overset{not}{=} x_1(t)\otimes x_2(t) \qquad (7.2)$$

Convoluția unui semnal cu $\delta(t)$ sau u(t) conduce la rezultate utile analizei numerice a semnalelor.

Produsul de convoluție se poate interpreta printr-o ilustrare grafică. În figura 7.1 sunt prezentate spre exemplificare funcțiile: $x_1(t)=u(t)$ şi $x_2(t)=1-e^{-at}, a>0$, al căror produs de convoluție $x(t)=x_1(t)\otimes x_2(t)$ este construit pe etape.

Aria haşurată reprezintă produsul de convoluție, care, aşa cum rezultă din (7.1) este o funcție de t.

Din reprezentarea grafică rezultă că pentru a efectua $x_1(t)\otimes x_2(t)$ se realizează simetricul celei de a doua funcții față de ordonată, $x_2(-\tau)$, se deplasează pe axa τ cu t secunde, rezultând $x_2(t-\tau)$, ca apoi să se înmulțească cu $x_1(t)$.

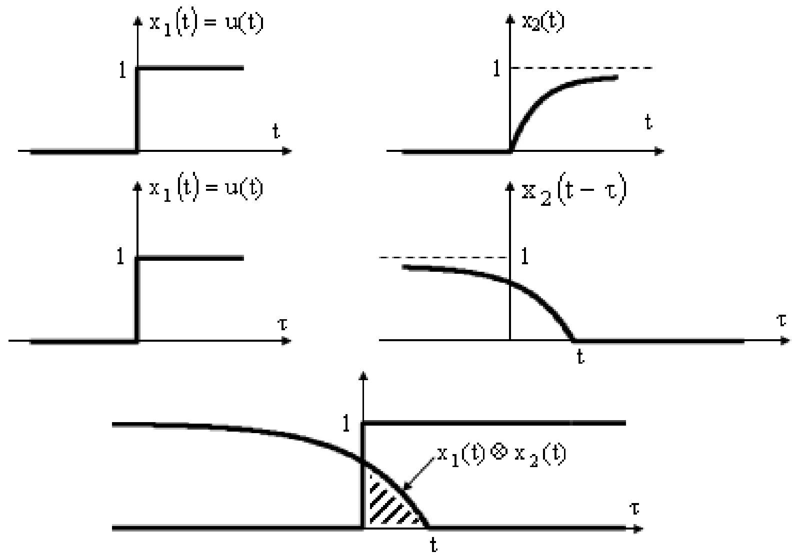


Fig. 7.1: Ilustrarea grafică a produsului de convoluție

7.1. TEOREMA INTEGRALEI DE CONVOLUȚIE ÎN TIMP.

Transformata Fourier a produsului de convoluție este produsul algebric al transformatelor Fourier ale semnalelor din produs.

$$X(j\omega)=X_1(j\omega)\cdot X_2(j\omega)$$

(7.3)

unde $X_1(j\omega)=F\{x_1(t)\}$; $X_2(j\omega)=F\{x_2(t)\}$

şi $x(t)=x_1(t)\otimes x_2(t)$

Demonstrație:

Aplicând transformata Fourier semnalului x(t), definit conform (7.1) rezultă că:

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \overset{(1.118)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt \qquad (7.4)$$

Inversând ordinea de integrare se obține:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right]d\tau \overset{(6.13)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\cdot X_2(j\omega)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau =$$

$$= X_2(j\omega)\cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau = X_2(j\omega)\cdot X_1(j\omega)$$

Proprietățile convoluției în timp a semnalelor.

a) Produsul de convoluție este comutativ.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau \tag{7.5}$$

b) În interiorul produsului de convoluție se poate aplica integrarea, respectiv derivarea

$$x(t) = x_1'(t)\otimes\left[\int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)d\tau\right] = \left[\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau\right]\otimes x_2'(t) \tag{7.6}$$

Proprietatea (7.6) se demonstrează ușor ținând cont că:

$$X(j\omega) = [j\omega X_1(j\omega)]\cdot\left[\frac{X_2(j\omega)}{j\omega}\right]$$

În mod analog produsului de convoluție în timp se definește produsul de convoluție în frecvență astfel:

$$X(j\omega) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\lambda)\cdot X_2(j(\omega-\lambda))d\lambda \tag{7.7}$$

Notația consacrată a produsului de convoluție în frecvență este următoarea:

$$X(j\omega) \overset{not}{=} X_1(j\omega)\otimes X_2(j\omega) \tag{7.8}$$

7.2. TEOREMA INTEGRALEI DE CONVOLUȚIE ÎN FRECVENȚĂ

Transformata Fourier inversă a produsului de convoluție în frecvență este produsul algebric al semnalelor, ponderate cu o constantă.

$$F^{-1}\{X_1(j\omega)\otimes X_2(j\omega)\} = 2\pi\cdot x_1(t)\cdot x_2(t) \tag{7.9}$$

Proprietățile de comutativitate, integrare și de derivare sunt valabile și în cazul convoluției în frecvență.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\lambda)X_2(j(\omega-\lambda))d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j(\omega-\lambda))X_2(j\lambda)d\lambda \tag{7.10}$$

$$X(j\omega) = X_1'(j\omega)\otimes\left[\int_{-\infty}^{\omega} X_2(j\lambda)d\lambda\right] = \left[\int_{-\infty}^{\omega} X_1(j\lambda)d\lambda\right]\otimes X_2'(j\omega) \tag{7.11}$$

7.3. EXEMPLE

În continuare se prezintă două exemple ale convoluției unui semnal x(t) cu funcția Dirac $\delta(t)$, respectiv funcția treaptă unitate u(t).

7.3.1. Convoluția cu impulsul Dirac $\delta(t)$

Conform proprietăților funcției $\delta(t)$, rezultă că:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t) \tag{7.12}$$

Relația (7.12) se poate scrie simbolic astfel:

$$x(t)\otimes\delta(t) = x(t) \tag{7.13}$$

Conform teoremei integralei de convoluție în timp, rezultă că:

$$F\{x(t)\otimes\delta(t)\}=X(j\omega)\cdot 1 \quad (7.14)$$

Concluzie:

Produsul de convoluție între un semnal şi funcția Dirac conduce la acelaşi semnal.

Această concluzie poate fi interpretată grafic. De asemenea această reprezentare grafică oferă posibilitatea de a demonstra relația (7.12).

Fie semnalul $x(t)$ prezentat în figura 7.2. Aria suprafeței de sub curba $x(t)$ poate fi aproximată printr-o sumă de impulsuri de suprafață $x(k\Delta t)\cdot\Delta t$. Spre exemplu, impulsul nehaşurat din figura 7.2, poate fi caracterizat de relația $x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\Delta t$, fiind localizat pe axa timpului la momentul $t=k\Delta t$.

Semnalul x(t) prezentat în figura 7.2 poate fi aproximat prin relația:

$$x(t)\approx\sum_{k=0}^{n}x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\Delta t \quad (7.15)$$

Aproximarea (7.15) este cu atât mai exactă cu cât intervalul de timp Δt al eşantionului este mai mic. La limită, $\Delta t\to d\tau, k\Delta t\to\tau$, relația (7.15) se transformă în integrală. Pentru un semnal x(t) a cărei durată este infinită, conform (7.15) şi a observațiilor anterioare rezultă că $\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)$, adică relația (7.12).

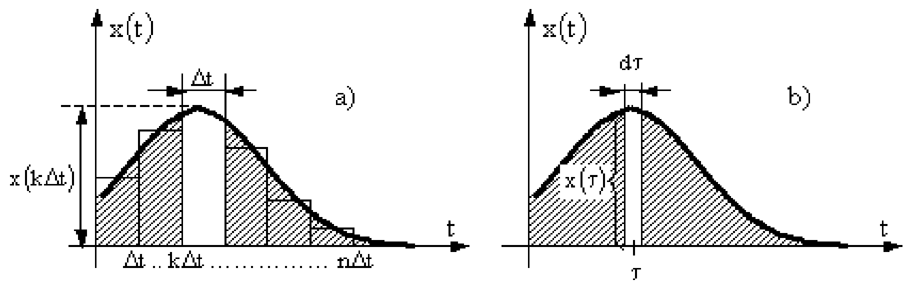


Fig. 7.2: Descompunerea unui semnal în eşantioane de lățime: a) Δt b) $d\tau$

Convoluția unui semnal x(t) cu impulsul Dirac oferă unele facilități în cadrul analizei semnalelor, cum ar fi:

- Descompunerea semnalelor în funcții de tip impuls-unitate

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad (7.16)$$

- Reprezentarea semnalelor prin eşantioane de tipul (7.16), proporționale cu impulsul Dirac permite determinarea (conform 7.14) a transfomatei $X(j\omega)$ a semnalului, ceea ce constituie o metodă de analiză numerică a semnalelor.
- Scrierea semnalelor sub forma de eşantioane este utilizată la analiza sistemelor liniare. Cunoscând răspunsul sistemului la un eşantion de forma (7.16), se obține prin superpoziție răspunsul la toate eşantioanele, adică la semnalul x(t) scris conform (7.15) sau (7.12).
- Convoluția cu impulsul Dirac poate fi utilizată la calculul unor transformate Fourier.

7.3.2. Convoluția cu impulsul treaptă unitate u(t)

Conform (7.12) produsul de convoluție al unui semnal x(t) cu funcția Dirac are expresia: $x(t)\otimes\delta(t)=x(t)$. Conform (7.6) în interiorul produsului de convoluție se poate aplica integrarea, respectiv derivarea, obținându-se relația

$$x(t)=x'(t)\otimes\left[\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau\right] \quad (7.17)$$

Aplicând asupra (7.17) observația că, $\delta(t)=\frac{d(u(t))}{dt}=u'(t)$, derivata funcției treaptă unitate este funcția Dirac, rezultă că:

$$x(t)=x'(t)\otimes u(\tau) \tag{7.18}$$

sau

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t} x'(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{7.19}$$

Concluzie:
Produsul de convoluție între derivata unui semnal şi funcția treaptă unitate conduce la acelaşi semnal.
Această concluzie poate fi interpretată grafic. De asemenea această reprezentare grafică oferă posibilitatea de a demonstra relația (7.19).
Fie semnalul x(t) prezentat în figura 7.3. ce poate fi aproximat printr-o sumă de trepte plasate pe axa timpului la momentele $t=k\Delta t$. Aceste semnale treaptă au amplitudinea egală cu $\Delta x(k\Delta t)$. Această amplitudine este astfel aleasă încât să fie aproximativ egală cu produsul dintre derivata semnalului (panta funcției x(t)) la momentul $t=k\Delta t$ şi durată Δt.

$$\Delta x(k\Delta t)\approx x'(k\Delta t)\Delta t \tag{7.20}$$

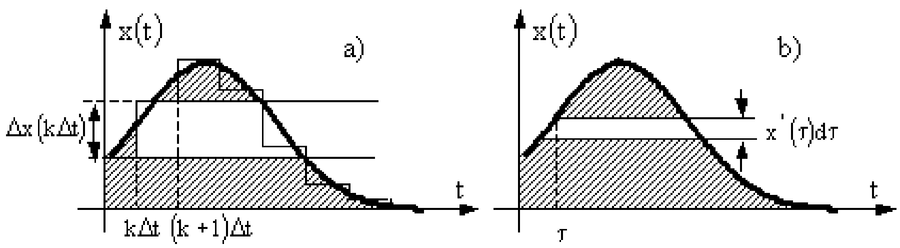


Fig. 7.3: Descompunerea unui semnal în semnale treaptă de amplitudine: a) $\Delta x(k\Delta t)$ b) $x'(\tau)d\tau$

Semnalul x(t) prezentat în figura 7.3 poate fi aproximat prin relația:

$$x(t)\approx\sum_{k=0}^{n} x'(k\Delta t)u(t-k\Delta t)\Delta t \tag{7.21}$$

Aproximarea (7.21) este cu atât mai exactă cu cât intervalul de timp Δt este mai mic. La limită, $\Delta t\to d\tau, k\Delta t\to\tau$, relația (7.21) se transformă în integrală. Pentru un semnal x(t) conform (7.21) şi a observațiilor anterioare rezultă că

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t} x'(\tau)u(t-\tau)d\tau,$$

adică relația (7.19).
Convoluția semnalului x(t) cu funcția treaptă unitate oferă facilități în cazul analizei semnalelor sau a sistemelor liniare.

7.4. APLICAȚII

7.4.1. Să se determine produsul de convoluție a semnalelor următoare:

$$x_1(t)=\begin{cases} e^{-a\cdot t} & \text{pentru } t>0 \\ 0 & \text{pentru } t\le 0 \end{cases};\ x_2(t)=\begin{cases} e^{-b\cdot t} & \text{pentru } t>0 \\ 0 & \text{pentru } t\le 0 \end{cases}.$$

Rezolvare

$$\left.\begin{array}{r} x(t):=(x_1\otimes x_2)(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)d\tau=\int\limits_{0}^{\infty} e^{-a\cdot\tau}\cdot e^{-b\cdot(t-\tau)}d\tau \\ \left.\begin{array}{r} x_1(\tau)\ne 0 \Leftrightarrow \tau>0 \\ x_2(t-\tau)\ne 0 \Leftrightarrow \tau<t \end{array}\right\}\Rightarrow 0<\tau<t \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t)=e^{-b\cdot t}\cdot\int\limits_0^t e^{(b-a)\cdot\tau}d\tau=e^{-b\cdot t}\cdot\left.\frac{e^{(b-a)\cdot\tau}}{b-a}\right|_0^t=\frac{e^{-b\cdot t}\cdot e^{(b-a)\cdot t}-e^{-b\cdot t}}{b-a}=\frac{e^{-a\cdot t}-e^{-b\cdot t}}{b-a}$$

Dacă $a=b$, atunci (se convolutează $x_1(t)$ cu ea însăşi):

$$x(t):=(x_1\otimes x_2)(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)d\tau=\int\limits_0^{\infty} e^{-a\cdot\tau}\cdot e^{-a\cdot(t-\tau)}d\tau=e^{-a\cdot t}\cdot\int\limits_0^t e^{(a-a)\cdot\tau}d\tau=t\cdot e^{-a\cdot t}$$

În final rezultă:

$$x(t)=\begin{cases} \dfrac{e^{-a\cdot t}-e^{-b\cdot t}}{b-a} & \text{pentru } a\ne b \\ t\cdot e^{-a\cdot t} & \text{pentru } a=b \end{cases}$$

7.4.2. Să se determine produsul de convoluție a semnalelor următoare:

$$x(t)=\begin{cases} 4t-8 & \text{dacă } t\in(2,3) \\ 0 & \text{altfel} \end{cases};\ y(t)=\begin{cases} 3e^{t} & \text{dacă } t<0 \\ 0 & \text{dacă } t\ge 0 \end{cases}$$

Rezolvare

$$x\otimes y(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot y(t-\tau)d\tau=\int\limits_2^3 (4\cdot\tau-8)\cdot y(t-\tau)d\tau$$

Dar $y(t-\tau)\ne 0 \Leftrightarrow t-\tau<0 \Leftrightarrow t<\tau$

- Dacă $\left.\begin{array}{r} t<2 \\ 2<\tau<3 \end{array}\right\}\Rightarrow t-\tau<0, \forall\tau\in(2;3)$
- Dacă $\left.\begin{array}{r} 2<t<3 \\ 2<\tau<3 \end{array}\right\}\Rightarrow t-\tau<0, \forall\tau\in(t;3)$
- Dacă $\left.\begin{array}{r} t>3 \\ 2<\tau<3 \end{array}\right\}\Rightarrow t-\tau>0, \forall\tau\in(2;3)$

Rezultă că:

$$x\otimes y(t)=\begin{cases} 12\int\limits_2^3(\tau-2)\cdot e^{t-\tau}d\tau & \text{dacă } t<2 \\ 12\int\limits_t^3(\tau-2)\cdot e^{t-\tau}d\tau & \text{dacă } 2<t<3=\ldots \\ 0 & \text{dacă } t>3 \end{cases}$$

9. CONVOLUŢIA ŞI CORELAŢIA SEMNALELOR ANALOGICE

9.1. PRODUSUL DE CONVOLUŢIE

Se numeşte funcţie (produs) de convoluţie în timp a semnalelor $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ integrala:

$$x(t) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \tag{9.1}$$

Notaţia consacrată a produsului de convoluţie în timp este următoarea:

$$x(t) \overset{\text{not}}{=} x_1(t) \otimes x_2(t) \tag{9.2}$$

Convoluţia unui semnal cu $\delta(t)$ sau u(t) conduce la rezultate utile analizei numerice a semnalelor.

Produsul de convoluţie se poate interpreta printr-o ilustrare grafică. În figura 9.1 sunt prezentate spre exemplificare funcţiile: $x_1(t) = u(t)$ şi $x_2(t) = u(t)\left(1 - e^{-at}\right)$, $a > 0$, al căror produs de convoluţie $x(t) = x_1(t) \otimes x_2(t)$ este construit pe etape.

Aria haşurată reprezintă produsul de convoluţie, care, aşa cum rezultă din (9.1) este o funcţie de t.

Din reprezentarea grafică rezultă că pentru a efectua $x_1(t) \otimes x_2(t)$ se realizează simetricul celei de a doua funcţii faţă de ordonată, $x_2(-\tau)$, se deplasează pe axa τ cu t secunde, rezultând $x_2(t-\tau)$, ca apoi să se înmulţească cu $x_1(t)$.

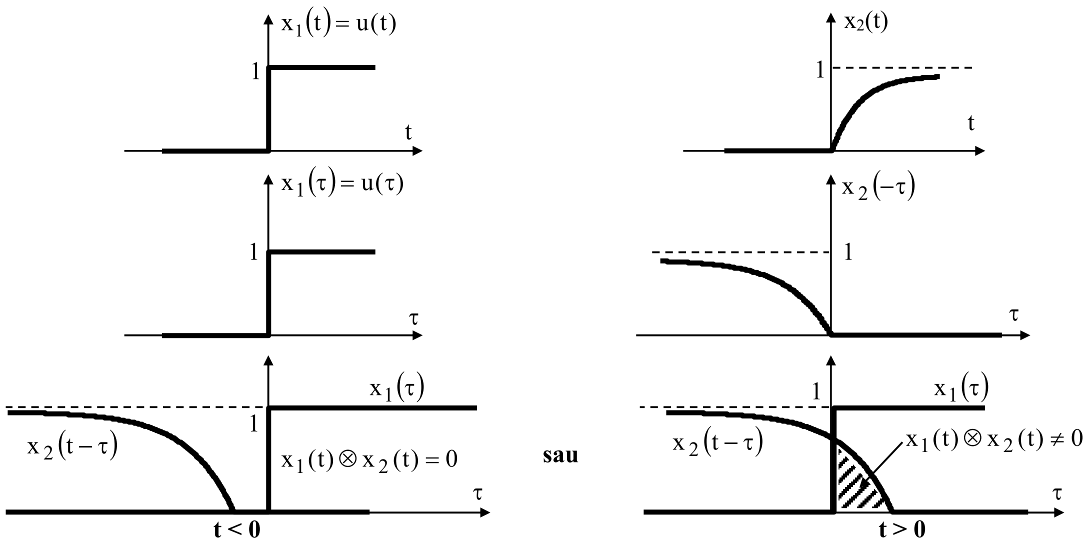


Fig. 9.1: Ilustrarea grafică a produsului de convoluţie

9.1.1. Teorema integralei de convoluţie în timp

Transformata Fourier a produsului de convoluţie este produsul algebric al transformatelor Fourier ale semnalelor din produs.

$$X(j\omega) = X_1(j\omega)X_2(j\omega) \tag{9.3}$$

unde $X_1(j\omega) = F\{x_1(t)\}$; $X_2(j\omega) = F\{x_2(t)\}$

şi $x(t) = x_1(t) \otimes x_2(t)$

Demonstraţie:

Aplicând transformata Fourier semnalului x(t), definit conform (9.1) rezultă că:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \overset{(6.9)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt \tag{9.4}$$

Inversând ordinea de integrare se obţine:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right]d\tau \overset{(6.13)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)X_2(j\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau =$$

$$= X_2(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = X_2(j\omega)X_1(j\omega)$$

Produsul de convoluţie în timp se bucură de câteva proprietăţi, ca de exemplu:

a) Produsul de convoluţie este comutativ.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau \tag{9.5}$$

b) În interiorul produsului de convoluţie se poate aplica integrarea, respectiv derivarea

$$x(t) = x_1'(t)\otimes\left[\int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)d\tau\right] = \left[\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau\right]\otimes x_2'(t) \tag{9.6}$$

Proprietatea (9.6) se demonstrează imediat, ţinând cont că:

$$X(j\omega) = [j\omega X_1(j\omega)]\cdot\left[\frac{X_2(j\omega)}{j\omega}\right]$$

În mod analog produsului de convoluţie în timp se defineşte produsul de convoluţie în frecvenţă astfel:

$$X(j\omega) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\lambda)X_2(j(\omega-\lambda))d\lambda \tag{9.7}$$

Notaţia consacrată a produsului de convoluţie în frecvenţă este următoarea:

$$X(j\omega) \overset{not}{=} X_1(j\omega)\otimes X_2(j\omega) \tag{9.8}$$

9.1.2. Teorema integralei de convoluţie în frecvenţă

Transformata Fourier inversă a produsului de convoluţie în frecvenţă este produsul algebric al semnalelor, ponderate cu o constantă.

$$F^{-1}\{X_1(j\omega)\otimes X_2(j\omega)\} = 2\pi x_1(t)x_2(t) \tag{9.9}$$

Demonstraţia este similară celei prezentate la teorema integralei de convoluţie în timp:

$$F^{-1}\{X_1(j\omega)\otimes X_2(j\omega)\} \overset{(6.10)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\lambda)X_2(j(\omega-\lambda))d\lambda\right]e^{j\omega t}d\omega \overset{(6.14)}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\lambda)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(j(\omega-\lambda))e^{j\omega t}d\omega\right]d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)e^{j\lambda t}X_1(j\lambda)d\lambda = 2\pi x_1(t)x_2(t)$$

Proprietăţile de comutativitate, integrare şi de derivare sunt valabile şi în cazul convoluţiei în frecvenţă.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\lambda)X_2(j(\omega-\lambda))d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j(\omega-\lambda))X_2(j\lambda)d\lambda \tag{9.10}$$

$$X(j\omega) = X_1'(j\omega)\otimes\left[\int_{-\infty}^{\omega} X_2(j\lambda)d\lambda\right] = \left[\int_{-\infty}^{\omega} X_1(j\lambda)d\lambda\right]\otimes X_2'(j\omega) \tag{9.11}$$

9.1.3. Exemple

În continuare se prezintă două exemple ale convoluţiei unui semnal x(t) cu funcţia Dirac $\delta(t)$, respectiv funcţia treaptă unitate u(t).

7.1.3.1. Convoluţia cu impulsul Dirac $\delta(t)$

Conform proprietăţilor funcţiei $\delta(t)$, rezultă că:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t) \tag{9.12}$$

Relaţia (9.12) se poate scrie simbolic astfel:

$$x(t)\otimes\delta(t)=x(t) \tag{9.13}$$

Conform teoremei integralei de convoluţie în timp, rezultă că:

$$F\{x(t)\otimes\delta(t)\}=X(j\omega)\cdot 1 \tag{9.14}$$

Concluzie:
Produsul de convoluţie între un semnal şi funcţia Dirac are ca rezultat semnalul original.
Acest rezultat poate fi interpretat grafic. De asemenea această reprezentare grafică este şi o justificare a relaţiei (9.12).
Fie semnalul $x(t)$ prezentat în figura 9.2. Aria suprafeţei de sub curba $x(t)$ poate fi aproximată printr-o sumă de impulsuri având suprafaţa $x(k\Delta t)\Delta t$. Spre exemplu, aria impulsului nehaşurat din figura 9.2 este dată de relaţia $x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\Delta t$, fiind localizat pe axa timpului la momentul $t = k\Delta t$.
Semnalul x(t) prezentat în figura 9.2 poate fi aproximat prin relaţia:

$$x(t)\approx\sum_{k=0}^{n} x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\cdot\Delta t \tag{9.15}$$

Aproximarea (9.15) este cu atât mai exactă cu cât intervalul de timp Δt al eşantionului este mai mic. La limită, $\Delta t\to d\tau, k\Delta t\to\tau$, relaţia (9.15) se transformă în integrală. Pentru un semnal x(t) a cărui durată este infinită, conform (9.15) şi a observaţiilor anterioare rezultă că $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau = x(t)$, adică relaţia (9.12).

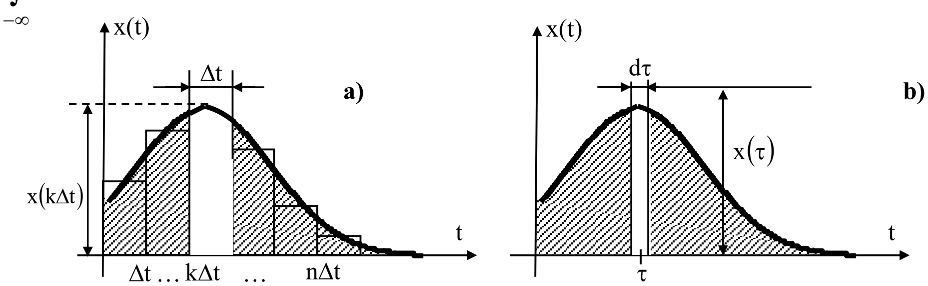


Fig. 9.2: Descompunerea unui semnal în eşantioane de lăţime: a) Δt; b) $d\tau$

Convoluţia unui semnal x(t) cu impulsul Dirac oferă unele facilităţi în cadrul analizei semnalelor, cum ar fi:

- Descompunerea semnalelor în funcţii de tip impuls-unitate

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{9.16}$$

- Reprezentarea semnalelor prin eşantioane de tipul (9.16), proporţionale cu impulsul Dirac permite determinarea (conform 9.14) a transfomatei $X(j\omega)$ a semnalului, ceea ce constituie o metodă de analiză numerică a semnalelor.
- Scrierea semnalelor sub forma de eşantioane este utilizată la analiza sistemelor liniare. Cunoscând răspunsul sistemului la un eşantion de forma (9.16), se obţine

prin superpoziţie răspunsul la toate eşantioanele, adică la semnalul x(t) scris conform (9.15) sau (9.12).

- Convoluţia cu impulsul Dirac poate fi utilizată la calculul unor transformate Fourier.

7.1.3.2. Convoluţia cu impulsul treaptă unitate u(t)

Conform (9.12) produsul de convoluţie al unui semnal x(t) cu funcţia Dirac are expresia: $x(t)\otimes\delta(t)=x(t)$. Conform (9.6) în interiorul produsului de convoluţie se poate aplica integrarea, respectiv derivarea, obţinându-se relaţia:

$$x(t)=x'(t)\otimes\left[\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau\right] \tag{9.17}$$

Aplicând asupra (9.17) observaţia că, $\delta(t)=\frac{d(u(t))}{dt}=u'(t)$ (derivata funcţiei treptă unitate este funcţia Dirac), rezultă că:

$$x(t)=x'(t)\otimes u(t) \tag{9.18}$$

sau

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}x'(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{9.19}$$

Concluzie:
Produsul de convoluţie între derivata unui semnal şi funcţia treaptă unitate are ca rezultat semnalul original.
Acest rezultat va fi de asemenea interpretat grafic, justificându-se astfel şi relaţia (9.19).
Fie semnalul x(t) prezentat în figura 9.3. ce poate fi aproximat printr-o sumă de trepte plasate pe axa timpului la momentele $t=k\Delta t$. Aceste semnale treaptă au amplitudinea egală cu $\Delta x(k\Delta t)=tg(\alpha)\Delta t\approx x'(k\Delta t)\Delta t$, adică această amplitudine este aproximativ egală cu produsul dintre derivata semnalului (panta funcţiei x(t)) la momentul $t=k\Delta t$ şi cu durata Δt).

$$\Delta x(k\Delta t)\approx x'(k\Delta t)\cdot\Delta t \tag{9.20}$$

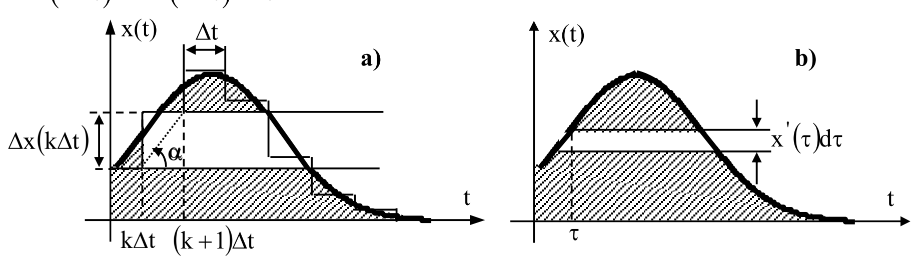


Fig. 9.3: Descompunerea unui semnal în semnale treaptă de amplitudine: a) $\Delta x(k\Delta t)$ b) $x'(\tau)d\tau$

Semnalul x(t) prezentat în figura 9.3 poate fi aproximat prin relaţia:

$$x(t)\approx\sum_{k=0}^{n}x'(k\Delta t)u(t-k\Delta t)\Delta t \tag{9.21}$$

Aproximarea (9.21) este cu atât mai exactă cu cât intervalul de timp Δt este mai mic. La limită, $\Delta t\to d\tau, k\Delta t\to\tau$, relaţia (9.21) se transformă în integrală. Pentru un semnal x(t) conform (9.21) şi a observaţiilor anterioare rezultă că

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}x'(\tau)u(t-\tau)d\tau,$$

adică relaţia (9.19).

Convoluţia semnalului x(t) cu funcţia treaptă unitate oferă facilităţi în cazul analizei semnalelor sau a sistemelor liniare.

9.2. FUNCŢIA DE CORELAŢIE

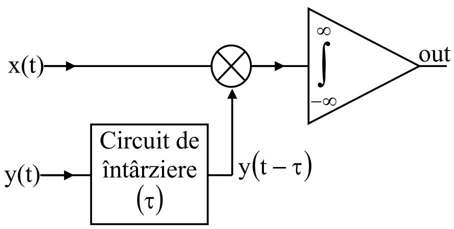


Fig. 9.4

Schema funcţională a unui corelator

Dacă x(t) şi y(t) sunt două semnale cu durata determinată, atunci integrala (9.22) defineşte funcţia lor de corelaţie (sau intercorelaţie) în timp:

$$R_{xy}(\tau) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-\tau)dt \qquad (9.22)$$

Se poate observa că funcţia de corelaţie caracterizează (depinde de) întârzierea τ a semnalului y(t) faţă de semnalul x(t).

Altfel spus, cu ajutorul corelaţiei se poate stabili dacă există o corespondenţă între evoluţiile în timp ale semnalelor (mărimilor) x(t) şi y(t). Una dintre aplicaţii constă în recunoaşterea semnalelor perturbate (în radiolocaţie de exemplu, şi în general în domeniul transmiterii informaţiei), comparându-le forma (perturbată) cu cea originală (presupusă cunoscută). În figura 9.4 se propune o schemă de principiu a unui corelator.

Cu schimbarea de variabilă $t_1 = t - \tau$, (9.22) devine:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1+\tau)y(t_1)dt$$

Rezultă că funcţia de corelaţie se poate defini şi prin relaţiile:

$$R_{xy}(\tau) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(t)dt \qquad (9.23)$$

Comparând definiţiile (9.1) şi (9.22), se poate observa că:

$$x(t)\otimes y(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(-(t-\tau))d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\tau-t)d\tau,$$

adică funcţia de corelaţie este de fapt convoluţia între x(t) şi y(-t), cu schimbarea $t \leftrightarrow \tau$ în rezultatul final. Dacă unul dintre semnale este par, atunci este evidentă echivalenţa între produsul de convoluţie şi funcţia de corelaţie.

9.2.1. Funcţia de autocorelaţie

În cazul în care semnalele x(t) şi y(t) coincid, se obţine un caz particular foarte important, numit autocorelaţie, sau corelaţia semnalului cu el însuşi:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(t)dt = x(t)\otimes x(-t)\big|_{t\leftrightarrow\tau} \qquad (9.24)$$

Dacă x(t) este par $(x(-t) = x(t))$, se poate observa că autocorelaţia este convoluţia semnalului x(t) cu el însuşi.

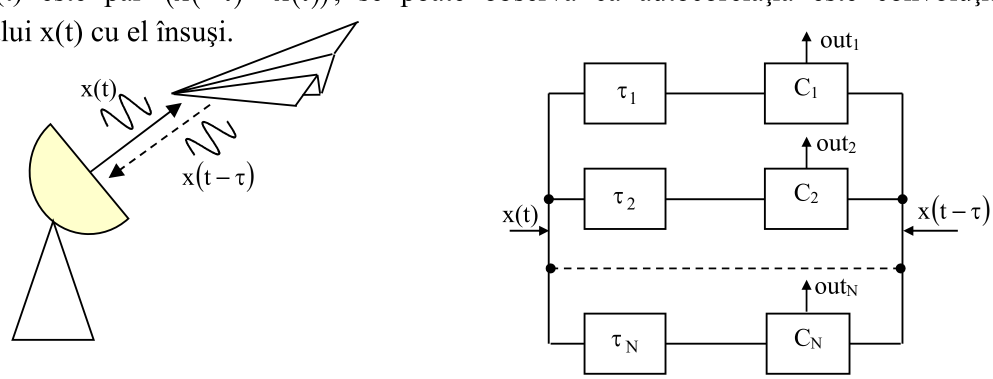


Fig. 9.5

Măsurarea distanţei în radiolocaţie cu ajutorul autocorelaţiei

O aplicaţie a funcţiei de autocorelaţie este determinarea distanţei până la ţintă cu ajutorul unui radiolocator. Acesta emite impulsurile de sondare x(t), cu durata t_i şi recepţionează răspunsurile $x(t-\tau)$, având aceeaşi formă, dar fiind întârziate în timp. Astfel, determinarea distanţei până la ţintă se poate face prin determinarea întârzierii τ. Mai concret, instalaţia constă în N corelatoare, la intrările cărora se aplică răspunsul şi semnalul de sondare, întârziat cu $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N$, cunoscute. La ieşirea din corelator există semnal numai când intrările sale sunt identice, deci dacă există semnal nenul la ieşirea k, $k = \overline{1, N}$, atunci $\tau = \tau_k$ şi astfel se determină distanţa. O posibilă schemă bloc a unui astfel de radiolocator este prezentată în figura 9.5.

Funcţia de autocorelaţie prezintă câteva proprietăţi:

- Paritatea: $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ (deci graficul $R_x(\tau)$ este simetric faţă de ordonată)

$$R_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt \overset{(7.22),(7.23)}{=} R_x(\tau) \tag{9.25}$$

- Funcţia de autocorelaţie evaluată în origine reprezintă energia semnalului:

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = W_x \tag{9.26}$$

- Pentru $\forall \tau > 0, |R_x(\tau)| < R_x(0) = W_x$. Consecinţa este că funcţia de autocorelaţie este descrescătoare pentru $\tau \in [0;\infty]$ (tocmai pentru că are un maxim în 0).
- Legătura între $G(\omega)$ (densitatea de energie) şi $R_x(\tau)$: Transformata Fourier a funcţiei de autocorelaţie defineşte densitatea de energie a semnalului.

$$\begin{aligned} F(R_x(\tau)) &= F\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt\right) = F(x(t) \otimes x(-t)) = X(j\omega)X(-j\omega) = \\ &= X(j\omega)\overline{X(j\omega)} = G(j\omega) \end{aligned} \tag{9.27}$$

Cum densitatea de energie este: $G(\omega) = |G(j\omega)| = |X^2(j\omega)|$ (9.28)

devine evidentă afirmaţia de mai sus:

$$R_x(\tau) = F^{-1}(G(j\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega \tag{9.29}$$

- În cazul semnalelor cu durata nedeterminată, funcţia de autocorelaţie se defineşte ca o mediere în timp:

$$\overline{R_x(\tau)} = \lim_{t_i \to \infty}\left(\frac{1}{t_i}\int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} x(t)x(t-\tau)dt\right) \tag{9.30}$$

Dacă x(t) este periodic, cu perioada T, atunci:

$$\overline{R_x(\tau)} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t-\tau)dt \tag{9.31}$$

9.3. APLICAŢII

9.3.1. Să se determine $x(t)\otimes y(t)$ pentru semnalele din figura 9.1.

Rezolvare

a) Expresiile celor două semnale sunt următoarele:

$$x(t)=u(t)=\begin{cases}1 & \text{dacă } t\ge 0\\ 0 & \text{dacă } t<0\end{cases}\ ;\ y(t)=u(t)\left(1-e^{-at}\right)=\begin{cases}1-e^{-at} & \text{dacă } t\ge 0\\ 0 & \text{dacă } t<0\end{cases}$$

Analizând cazurile posibile din figura 9.1 sau observând că pentru $t<0$ integrala de convoluţie este nulă, se obţine:

$$x(t)\otimes y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau=\begin{cases}0 & \text{dacă } t<0\\ \int_0^t\left(1-e^{-a(t-\tau)}\right)d\tau & \text{dacă } t\ge 0\end{cases}$$

Efectuând calculele, rezultă că:

$$x\otimes y(t)=\left(t+\frac{e^{-at}-1}{a}\right)u(t)$$

<u>Observaţie</u>:

Cum $x(t)=u(t)$, observând proprietatea (9.18) – convoluţia cu u(t) – se poate observa că rezultatul convoluţiei trebuie să fie o funcţie a cărei derivată să fie y(t), adică:

$$x(t)\otimes y(t)=u(t)\otimes y(t)=\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau=\begin{cases}0 & \text{dacă } t<0\\ \int_0^t\left(1-e^{-a(t-\tau)}\right)d\tau & \text{dacă } t\ge 0\end{cases}$$

9.3.2. Să se determine $x(t)\otimes y(t)$, $R_{xy}(\tau)$, $R_x(\tau)$ şi $R_y(\tau)$ pentru semnalele următoare:

$$x(t)=(t-2)[u(t-2)-u(t-3)]=\begin{cases}t-2 & \text{dacă } t\in(2,3)\\ 0 & \text{altfel}\end{cases};\ y(t)=e^t u(-t)=\begin{cases}e^t & \text{dacă } t<0\\ 0 & \text{dacă } t\ge 0\end{cases}$$

Rezolvare

a) Pentru a observa intervalele de timp în care integrala de convoluţie este nenulă, reprezentarea grafică a semnalelor $x(\tau)$ şi $y(t-\tau)$ poate fi deosebit de utilă, după cum se poate observa în figura 9.6, în care s-au haşurat situaţiile în care $x\otimes y(t)\ne 0$.

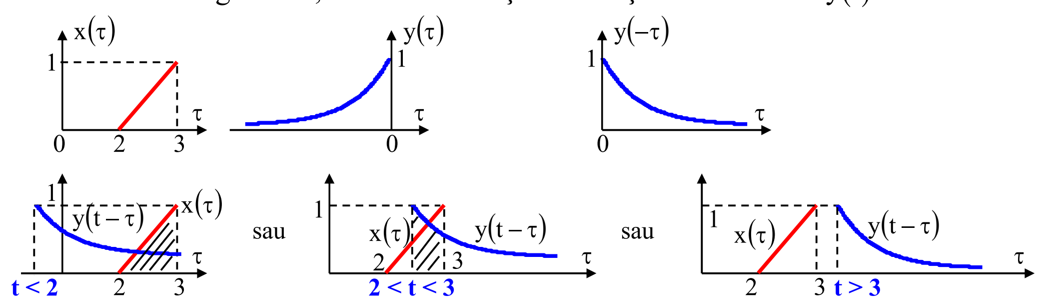


Fig. 9.6

Cum $x(\tau)\ne 0 \Leftrightarrow 2\le t\le 3$, rezultă că:

$$x(t)\otimes y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau=\int_2^3(\tau-2)y(t-\tau)d\tau$$

De asemenea, $y(t-\tau)\neq 0 \Leftrightarrow t-\tau<0 \Leftrightarrow t<\tau$. Conform figurii 9.6, rezultă că:

- Dacă $\left.\begin{matrix} t<2 \\ 2<\tau<3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow t-\tau<0, \forall \tau \in (2;3) \Rightarrow x\otimes y=\int_2^3 (\tau-2)\cdot e^{t-\tau}d\tau$
- Dacă $\left.\begin{matrix} 2<t<3 \\ 2<\tau<3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow t-\tau<0, \forall \tau \in (t;3) \Rightarrow x\otimes y=\int_t^3 (\tau-2)\cdot e^{t-\tau}d\tau$
- Dacă $\left.\begin{matrix} t>3 \\ 2<\tau<3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow t-\tau>0, \forall \tau \in (2;3) \Rightarrow y(t-\tau)=0 \Rightarrow x\otimes y=0$

În concluzie:

$$(x\otimes y)(t)=\begin{cases} \int_2^3 (\tau-2)\cdot e^{t-\tau}d\tau & \text{dacă } t\leq 2 \\ \int_t^3 (\tau-2)\cdot e^{t-\tau}d\tau & \text{dacă } 2<t<3 \\ 0 & \text{dacă } t\geq 3 \end{cases} = \begin{cases} e^{t-2}-2e^{t-3} & \text{dacă } t\leq 2 \\ t-2e^{t-3}-1 & \text{dacă } 2<t<3 \\ 0 & \text{dacă } t\geq 3 \end{cases}$$

Pentru verificare, se poate calcula $y(t)\otimes x(t)$. Conform proprietăţii de comutativitate, trebuie să se obţină acelaşi rezultat:

$$x(t)\otimes y(t)=y(t)\otimes x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\cdot x(t-\tau)d\tau$$

Cu ajutorul reprezentărilor grafice din figura 9.7, se obţine:

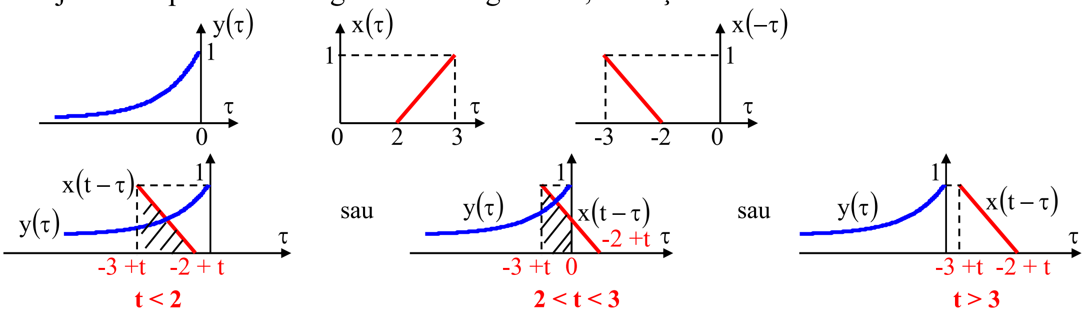


Fig. 9.7

$$(y\otimes x)(t)=\begin{cases} \int_{-3+t}^{-2+t} e^{\tau}\cdot(t-\tau-2)d\tau & \text{dacă } t\leq 2 \\ \int_{-3+t}^{0} e^{\tau}\cdot(t-\tau-2)d\tau & \text{dacă } 2<t<3 \\ 0 & \text{dacă } t\geq 3 \end{cases} = \begin{cases} e^{t-2}-2e^{t-3} & \text{dacă } t\leq 2 \\ t-2e^{t-3}-1 & \text{dacă } 2<t<3 \\ 0 & \text{dacă } t\geq 3 \end{cases}$$

Se poate observa că s-au regăsit rezultatele obţinute iniţial.

b1) În conformitate cu (9.22), funcţia de corelaţie are expresia: $R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-\tau)dt$, care, ţinând cont de faptul că semnalele x(t) şi y(t) sunt nenule numai pentru $2<t<3$, respectiv $t<\tau$, devine $R_{xy}(\tau)=\int_2^3 (t-2)e^{t-\tau}dt; t<\tau$.

- Dacă $\tau < 2$, atunci $y(t-\tau) = e^{t-\tau}u(\tau - t) = 0, \forall t \in (2;3)$ şi deci $R_{xy}(\tau) = 0$;
- Dacă $2 \le \tau < 3$, atunci $y(t-\tau) = e^{t-\tau}u(\tau - t) = 0, \forall t \in (\tau;3)$ şi deci

$$R_{xy}(\tau) = \int_2^{\tau} e^{t-\tau}(t-2)dt = e^{t-\tau}(t-3)\Big|_{t=2}^{\tau} = \tau - 3 + e^{2-\tau}$$

- Dacă $\tau > 3$, atunci $x(t)y(t-\tau) \ne 0, \forall t \in (2;3)$ şi deci

$$R_{xy}(\tau) = \int_2^{3} e^{t-\tau}(t-2)dt = e^{t-\tau}(t-3)\Big|_{t=2}^{3} = e^{2-\tau}$$

În concluzie:

$$R_{xy}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \tau < 2 \\ \tau - 3 + e^{2-\tau} & \text{dacă } 2 \le \tau < 3 \\ e^{2-\tau} & \text{dacă } \tau \ge 3 \end{cases}$$

Se poate observa cu uşurinţă că funcţia de corelaţie este continuă.

b2) În conformitate cu (9.24), funcţia de autocorelaţie are expresia: $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt$, care, ţinând cont de faptul că semnalele x(t) şi $x(t-\tau)$ sunt nenule numai pentru $2 < t < 3$, respectiv $\tau + 2 < t < \tau + 3$, devine:

$$R_x(\tau) = \int_2^3 (t-2)(t-\tau-2)dt ; \tau + 2 < t < \tau + 3 .$$

- Dacă $\tau < -1$, atunci $x(t-\tau) = 0, \forall t \in (2;3)$ şi deci $R_x(\tau) = 0$;
- Dacă $-1 \le \tau < 0$, atunci $x(t-\tau) = 0, \forall t > 3 + \tau$ şi deci

$$R_x(\tau) = \int_2^{3+\tau} (t-2)(t-\tau-2)dt = \left(\frac{t^3}{3} - (\tau+2)\frac{t^2}{2} + 2(\tau+2)t\right)\Bigg|_{t=2}^{\tau+3} = \frac{1}{3} + \frac{\tau}{2} - \frac{\tau^3}{6}$$

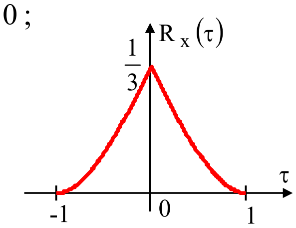
- Dacă $0 \le \tau < 1$, atunci $x(t-\tau) = 0, \forall t < 2 + \tau$ şi deci

$$R_x(\tau) = \int_{2+\tau}^{3} (t-2)(t-\tau-2)dt = \left(\frac{t^3}{3} - (\tau+2)\frac{t^2}{2} + 2(\tau+2)t\right)\Bigg|_{t=2+\tau}^{3} = \frac{1}{3} - \frac{\tau}{2} + \frac{\tau^3}{6}$$

- Dacă $\tau > 1$, atunci $x(t-\tau) = 0, \forall t \in (2;3)$ şi deci $R_x(\tau) = 0$;

În concluzie:

$$R_x(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } |\tau| > 1 \\ \frac{1}{3} - \frac{|\tau|}{2} + \frac{|\tau|^3}{6} & \text{dacă } |\tau| \le 1 \end{cases}$$

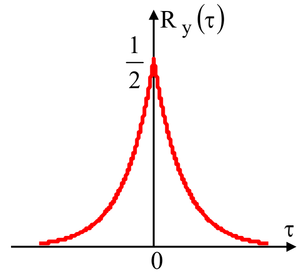


b3) În conformitate cu (9.24), funcţia de autocorelaţie are expresia: $R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t+\tau)y(t)dt$, care, ţinând cont de faptul că semnalele y(t) şi $y(t+\tau)$ sunt nenule numai pentru $t < 0$, respectiv $t < -\tau$, devine:

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{0} e^{t+\tau}e^{t}dt ; t < -\tau .$$

- Dacă $\tau < 0$, atunci $y(t+\tau) \ne 0, \forall t < 0$ şi deci

$$R_y(\tau)=\int_{-\infty}^{0} e^{t+\tau}e^{t}dt=e^{\tau}\cdot\left.\frac{e^{2t}}{2}\right|_{-\infty}^{0}=\frac{e^{\tau}}{2}$$



- Dacă $\tau\ge 0$, atunci $y(t+\tau)\neq 0,\forall t<-\tau$ şi deci

$$R_y(\tau)=\int_{-\infty}^{-\tau} e^{t+\tau}e^{t}dt=e^{\tau}\cdot\left.\frac{e^{2t}}{2}\right|_{-\infty}^{-\tau}=\frac{e^{-\tau}}{2}$$

În concluzie:

$$R_y(\tau)=\frac{e^{-|\tau|}}{2}$$

7.3.3. Să se determine x(t) dacă $X(j\omega)=\frac{1}{\omega^2+4}\cdot\sin c(10\omega)$.

Rezolvare

Analizând expresia $X(j\omega)$, se poate observa că aceasta se prezintă sub forma unui produs care poate fi gândit ca transformata Fourier a unei convoluţii a originalelor, în conformitate cu (9.3) (teorema convoluţiei în domeniul "timp"). Astfel, considerând $X_1(j\omega)=\frac{1}{\omega^2+4}$ şi $X_2(j\omega)=\sin c(10\omega)$, dacă se vor fi deteminat transformatele lor inverse $x_1(t)$ şi $x_2(t)$, atunci x(t) s-ar putea obţine prin convoluţia acestora în timp.

În $X_2(j\omega)$ se recunoaşte imediat transformata Fourier a impulsului video simetric cu amplitudinea M: $V_s(j\omega)=\tau M\sin c\frac{\omega\tau}{2}$.

Prin identificare, se observă că $\frac{\omega\tau}{2}=10\omega,\forall\omega$, de unde se obţine valoarea duratei impulsului video: $\tau=20$. De asemenea, tot prin identificare, se observă că $\tau M=1$, de unde este evident că $M=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{20}$, determinându-se astfel originalul transformatei $X_2(j\omega)$:

$$X_2(j\omega)=\sin c(10\omega)=20\cdot\frac{1}{20}\cdot\sin c\left(\frac{\omega\cdot 20}{2}\right)=F(x_2(t))$$

unde $x_2(t)=v_s(t)=\begin{cases} M=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{20} & \text{dacă}\,|t|<\frac{\tau}{2}=10 \\ 0 & \text{dacă}\,|t|>\frac{\tau}{2}=10 \end{cases}$

La analiza spectrală a semnalelor neperiodice s-a determinat transformata Fourier a semnalului treaptă unitate u(t), pentru care s-a pornit de la semnalul exponenţial $e^{-\alpha t}u(t);\alpha>0$; în urma calculelor efectuate s-a obţinut rezultatul: $F\{e^{-\alpha t}\}=\frac{1}{\alpha+j\omega}$.

Analizând acum expresia $X_1(j\omega)$, se poate observa că aceasta se poate descompune în fracţii simple:

$$X_1(j\omega)=\frac{1}{\omega^2+4}=\frac{1}{(2+j\omega)(2-j\omega)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2+j\omega)+(2-j\omega)}{(2+j\omega)(2-j\omega)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2-j\omega}+\frac{1}{2+j\omega}\right)$$

În $X_1(j\omega)$ se recunosc imediat transformatele Fourier ale semnalelor exponenţiale:

$F\{e^{-2t}u(t)\}=\frac{1}{2+j\omega}$ şi $F\{e^{2t}u(-t)\}=\frac{1}{2-j\omega}$, de unde rezultă că:

$x_1(t)=e^{-2t}u(t)+e^{2t}u(-t)=e^{-2|t|}$.

În aceste condiţii, x(t) se determină prin convoluţie:

$$x(t) := x_2(t)\otimes x_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau = \int_{-10}^{10}\frac{1}{20}e^{-2|t-\tau|}d\tau =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{20}\int_{-10}^{10} e^{-2(\tau-t)}d\tau & \text{dacă } t < -10 \\ \frac{1}{20}\int_{-10}^{t} e^{-2(t-\tau)}d\tau + \frac{1}{20}\int_{t}^{10} e^{-2(\tau-t)}d\tau & \text{dacă } -10 \le t < 10 = \\ \frac{1}{20}\int_{-10}^{10} e^{-2(t-\tau)}d\tau & \text{dacă } t \ge 10 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{e^{2t}}{40}\left(e^{-20}+e^{20}\right) = \frac{e^{2t}ch(20)}{20} & \text{dacă } t < -10 \\ \frac{1}{20} - \frac{e^{-20}}{40}\left(e^{-2t}+e^{2t}\right) = \frac{1-e^{-20}}{20}ch(2t) & \text{dacă } -10 \le t < 10 \\ \frac{e^{-2t}}{40}\left(e^{-20}+e^{20}\right) = \frac{e^{2t}ch(20)}{20} & \text{dacă } t \ge 10 \end{cases}$$

9.3.4. Să se determine produsul de convoluţie a semnalelor următoare:

$$x_1(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{pentru } t > 0 \\ 0 & \text{pentru } t \le 0 \end{cases};\ x_2(t) = \begin{cases} e^{-bt} & \text{pentru } t > 0 \\ 0 & \text{pentru } t \le 0 \end{cases}.$$

Rezolvare

$$\left.\begin{array}{r} x(t) := x_1(t)\otimes x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} e^{-a\tau}\cdot e^{-b(t-\tau)}d\tau \\ \left.\begin{array}{r} x_1(\tau)\ne 0 \Leftrightarrow \tau > 0 \\ x_2(t-\tau)\ne 0 \Leftrightarrow \tau < t \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \tau < t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-bt}\int_0^t e^{(b-a)\tau}d\tau = e^{-bt}\left.\frac{e^{(b-a)\tau}}{b-a}\right|_0^t = \frac{e^{-bt}e^{(b-a)t} - e^{-bt}}{b-a} = \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$$

Dacă $a = b$, atunci (se convolutează semnalul $x_1(t)$ cu el însuşi):

$$x(t) := (x_1\otimes x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} e^{-a\tau}e^{-a(t-\tau)}d\tau = e^{-at}\int_0^t e^{(a-a)\tau}d\tau = te^{-at}$$

În final rezultă:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a} & \text{pentru } a \ne b \\ te^{-at} & \text{pentru } a = b \end{cases}$$

9.3.5. Să se determine produsul de convoluţie a semnalelor următoare:

$$x(t) = (u(t) - u(t-2\pi))\sin(t)\ ;\ y(t) = u(t)$$

9.3.6. Să se determine produsul de convoluţie a semnalelor următoare:

$$x(t) = \frac{1}{t^2+1}u(-t)\ ;\ y(t) = u(t-1)$$

9.3.7. Să se determine funcţia de autocorelaţie a semnalului sinusoidal periodic:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Rezolvare

$$\overline{R_x(\tau)} = \frac{A^2}{T}\int_0^T \sin(\omega t + \varphi)\cdot \sin(\omega t - \omega\tau + \varphi)dt =$$

$$= \frac{A^2}{2T}\int_0^T \cos(\omega\tau)dt - \underbrace{\frac{A^2}{2T}\int_0^T \cos(2\omega t - \omega\tau + 2\varphi)dt}_{0} = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

9.3.7. Să se determine funcţia de autocorelaţie a impulsului dreptunghiular periodic, cu amplitudinea A, perioada T şi factorul de umplere q; aceeaşi problemă în cazul semnalului dreptunghiular neperiodic (semnal video).

Rezolvare

✓ Pentru semnalul **periodic**, analizând figura 7.8, este evident că $\overline{R_x(\tau)} = 0$ dacă $|\tau| > qT$. Altfel, rezultă că:

- Dacă $0 \le \tau \le qT$, atunci funcţia de autocorelaţie este aria haşurată din figura 9.8a:

$$\overline{R_x(\tau)} = \frac{A^2}{T}\int_\tau^{qT} dt = \frac{A^2}{T}(qT - \tau) = A^2\left(q - \frac{\tau}{T}\right)$$

- Dacă $-qT \le \tau \le 0$, funcţia de autocorelaţie este aria haşurată din figura 9.8b:

$$\overline{R_x(\tau)} = \frac{A^2}{T}\int_0^{qT+\tau} dt = \frac{A^2}{T}(qT + \tau) = A^2\left(q - \frac{\tau}{T}\right)$$

Analizând figurile 9.8, este evident faptul că, dacă $|\tau| \le qT$, atunci cele două arii haşurate sunt egale, astfel că funcţia de autocorelaţie este:

$$\overline{R_x(\tau)} = \begin{cases} A^2\left(q - \dfrac{|\tau|}{T}\right) & \text{dacă}\,|\tau| \le qT \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

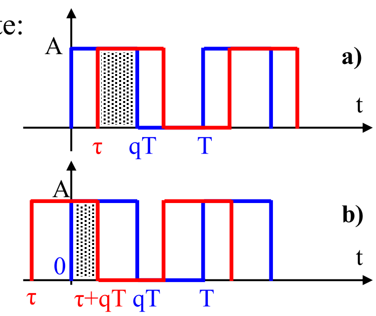


Figura 9.8

✓ În cazul semnalului **neperiodic**:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt$$

Considerând t_1 durata semnalului şi procedând la fel ca în cazul precedent, analizând şi figura 9.8, este evident că $R_x(\tau) = 0$ dacă $|\tau| > t_1$. Altfel, se obţin aceleaşi două situaţii din cazul precedent:

- Dacă $0 \le \tau \le t_1$, atunci funcţia de autocorelaţie devine:

$$R_x(\tau) = A^2\int_\tau^{t_1} dt = A^2(t_1 - \tau)$$

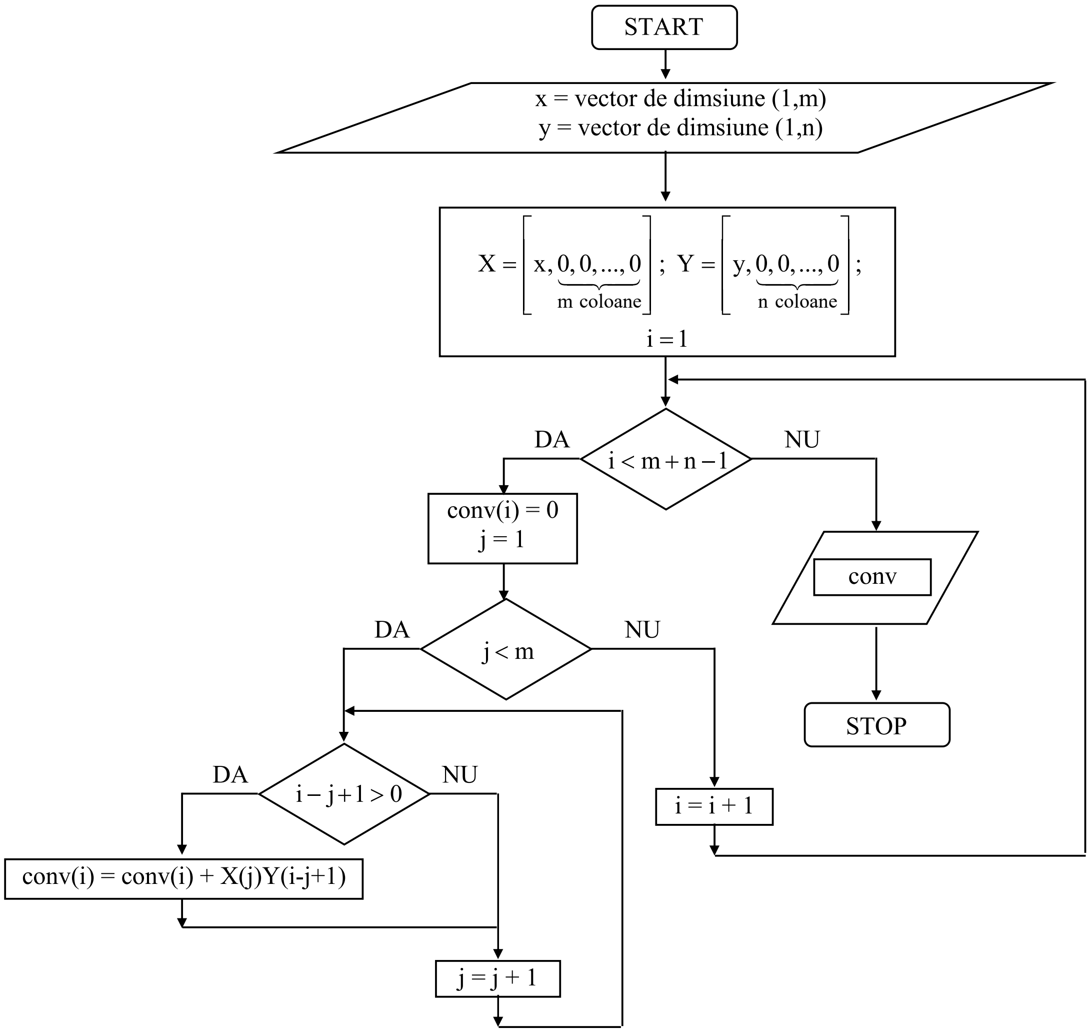
- Dacă $-t_1 \le \tau \le 0$, funcţia de autocorelaţie este uaria haşurată din figura 9.8b::

$$R_x(\tau) = A^2\int_0^{t_1+\tau} dt = A^2(t_1 + \tau)$$

În concluzie, funcţia de autocorelaţie a semnalului dreptunghiular neperiodic (semnalul video) are expresia: $R_x(\tau) = \begin{cases} A^2(t_1 - |\tau|) & \text{dacă}\,|\tau| \le t_1 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$.

Valoarea sa maximă este: $R_{x_{max}} = R_x(0) = A^2 t_1$.

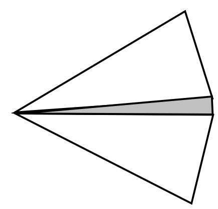
9.3.8. Algoritm de calcul numeric a convoluţiei



Implementare Matlab:

```
close all
clearvars
a=1;
x=heaviside(1:1:50);
y=(1-exp(-a*(0:.5:10)));
% algoritm de calcul al convolutiei
m=length(x);
n=length(y);
X=[x,zeros(1,n)]; % Adaug la x n coloane nule; ==> X are dimensiunea (1,
m+n) -1 linie si m+n coloane
Y=[y,zeros(1,m)]; % Adaug la y m coloane nule; ==> Y are dimensiunea (1,
m+n) -1 linie si m+n coloane
% Am obtinut astfel doi vectori cu aceeasi dimensiune
for i=1:n+m-1
    AlgConv(i)=0;
    for j=1:m
        if(i-j+1>0)
            AlgConv(i)=AlgConv(i)+X(j)*Y(i-j+1);
        end
    end
end
```

```
%Calculul convolutiei cu ajutorul functiei Matlab "Conv"
FctConv=conv(x,y);
%Produsul de convolutie calculat analitic
t=0:1:n-1;
v=t+(exp(-a*t)-1)/a;
% grafice
figure;
subplot(5,1,1);stem(x, '-b^');xlabel('-->n');ylabel('x[n]');grid on;
title('semnalul x[n]');
subplot(5,1,2); stem(y, '-ms');xlabel('-->n'); ylabel('y[n]');grid on;
title('semnalul y[n]');
subplot(5,1,3); stem(AlgConv, '-ro');xlabel('--
>n');ylabel('AlgConv[n]');grid on;
title('Convolutia a doua semnale fara a utiliza functia "conv"');
subplot(5,1,4); stem(FctConv, '-ro');xlabel('--
>n');ylabel('FctConv[n]');grid on;
title('Convolutia a doua semnale cu ajutorul functiei "conv"')
subplot(5,1,5); stem(v, '-bo');xlabel('-->n');ylabel('Analitic[n]');grid
on;
title('Graficul functiei de convolutie calculata analitic')
```



8. SEMNALE EŞANTIONATE

Un semnal este complet determinat prin reprezentarea sa fie în domeniul timp (formă de undă), fie în domeniul frecvenţă (spectru).
Pe baza acestui concept se poate realiza transmiterea simultană a mai multor semnale pe un singur canal de telecomunicaţii.
Pe acelaşi canal de comunicaţie se pot transmite simultan mai multe semnale dacă acestea pot fi separate fie în domeniul frecvenţă, fie în domeniul timp. Conform acestor precizări, semnalele ocupă fie benzi diferite de frecvenţă, fie intervale diferite de timp.
Transmiterea simultană a mai multor semnale pe un acelaşi canal fizic, prin separarea lor în domeniul frecvenţă se numeşte multiplexare în frecvenţă iar transmiterea simultană a mai multor semnale prin separarea lor în domeniul timp se numeşte multiplexare în timp.
S-a arătat că un semnal finit în timp este infinit în frecvenţă şi invers (un semnal periodic, ce este teoretic de durată infinită, are un spectru finit, iar un impuls - semnal cu durată finită - are un spectru teoretic infinit).
În consecinţă:

- la multiplexarea în frecvenţă, semnalele ce se transmit simultan, au spectre de frecvenţă diferite şi finite, dar durata lor fiind infinită, apar interferenţe între ele în domeniul timp.
- la multiplexarea în timp, se transmit impulsuri la momente diferite, dar având spectre teoretic infinite, apar interferenţe între ele în domeniul frecvenţă.

Separarea semnalelor la recepţie se face pe baza identităţii păstrate în domeniul frecvenţă, respectiv în domeniul timp.
Multiplexarea în frecvenţă se poate realiza pe baza modulaţiei semnalelor, tehnică ce permite prin translatarea spectrelor separarea lor în domeniul frecvenţă.
Multiplexarea în timp se bazează pe eşantionarea semnalelor şi transmiterea acestora la momente diferite de timp, astfel încât eşantioanele să nu se suprapună.
Eşantionarea este o metodă de reprezentare a semnalelor analogice printr-o succesiune de valori (eşantioane), considerate la momente discrete de timp.
Pentru a ilustra eşantionarea se utilizează reprezentările grafice din figura 8.1.

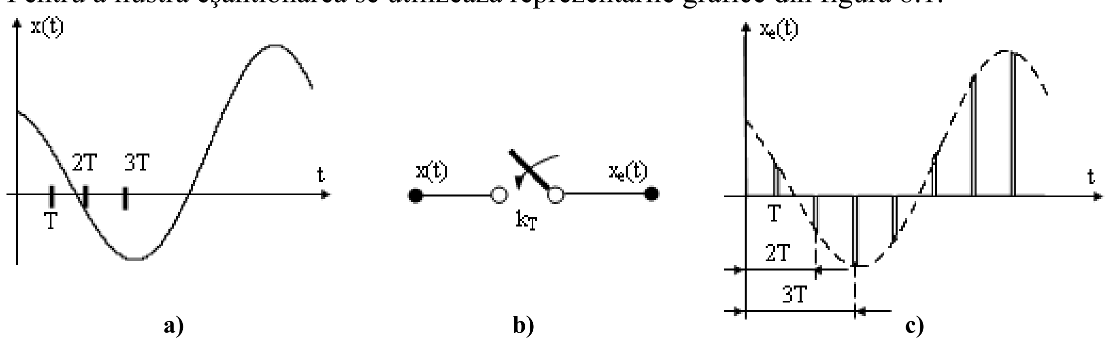


Fig. 8.1: Ilustrarea eşantionării

Semnalul analogic x(t) - figura 8.1a se aplică unui comutator k_T - figura 8.1b.
Comutatorul se închide la fiecare moment $t = nT, n \in N$, revenind în poziţia “deschis” după un interval de timp infinit de mic.
La ieşirea din comutator se obţine semnalul eşantionat $x_e(t) = \{x(nT)\}$, reprezentat în figura 8.1c. Valorile {x(nT)} reprezintă eşantioanele semnalului x(t).
Observaţie:
Durata în care comutatorul k_T este închis este finită şi foarte mică. Idealizarea comportării comutatorului ($\Delta t \to 0$) implică idealizarea semnalului eşantionat (durata eşantioanelor tinde spre zero). Această idealizare permite elaborarea unor modele de studiu simple şi

generale, care pot fi adaptate ulterior la realitatea fizică. Eşantionarea prezentată în figura 8.1 este periodică, deoarece comutatorul k_T este acționat periodic.

Se definesc:

- Perioada de eşantionare: T;
- Pulsația de eşantionare: $\Omega = \frac{2\pi}{T}$.

Prin eşantionare se obține un semnal discret în timp, care poate fi reprezentat în două moduri:

- ca o funcție de variabilă nT, $x_e(t) = f\{x(nT)\}$;
- ca o funcție de variabilă numerică (dacă se raportează variabila t la perioada T) $x_e(n) = f\{x(n)\}$. În acest caz se mai foloseşte şi scrierea $x_e(n) := x[n]$, notație ce va fi folosită în continuare.

Semnalul eşantionat se poate reprezenta matematic cu ajutorul functiei (ce provine din impulsul Dirac) “delta periodic”: $\delta_T(t)$.

Semnalul delta periodic este o succesiune de impulsuri unitate (impulsuri Dirac) fiind reprezentată grafic în figura 8.2

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{8.1}$$

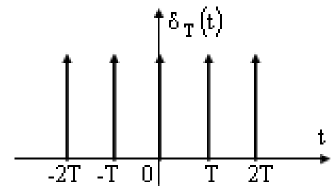


Fig. 8.2 Funcția delta periodic

În concluzie un semnal eşantionat are următoarea expresie matematică:

$$x[n] = x(t)\cdot\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot\delta(t - nT) \tag{8.2}$$

Modalitatea de transmitere a eşantioanelor unor semnale la momente diferite de timp, astfel încât acestea să nu se suprapună (principiului multiplexării în timp) este ilustrată în figura 8.3.

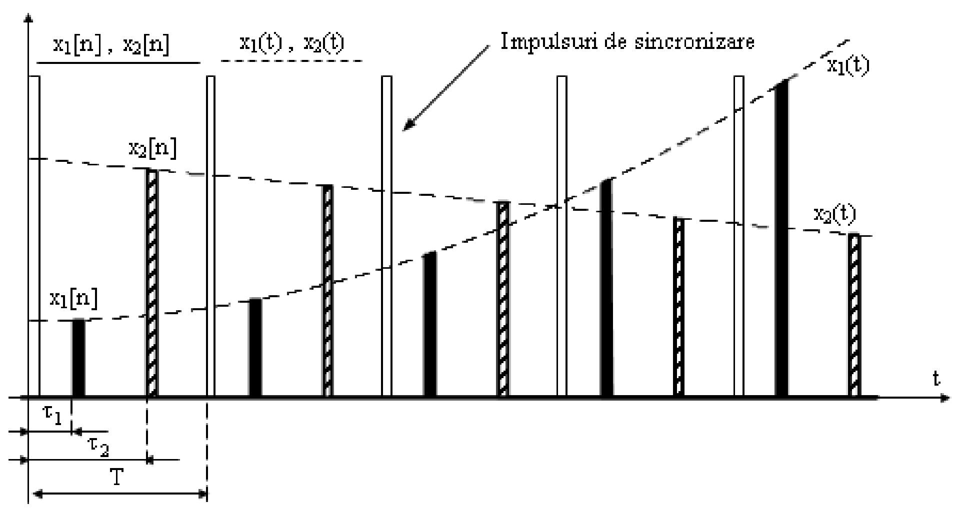


Fig. 8.3: Ilustrarea principiului multiplexării în timp

Identitatea fiecărui semnal este dată de duratele τ_i față de anumite momente de referință marcate în figura 8.3 prin impulsuri de sincronizare. La recepție, eşantioanele diferitelor semnale se separă prin detecție sincronă.

Din cele prezentate în figura 8.3, rezultă că multiplexarea în timp este realizabilă în principiu. Demonstrația faptului că multiplexarea în timp se poate realiza practic, constă în a arăta că semnalul ce se eşantionează poate fi reconstituit numai din cunoaşterea acestor eşantioane, altfel spus **că semnalul este unic determinat de eşantioanele sale.**

8.1 TEOREMA EŞANTIONĂRII (Shannon)

Orice semnal x(t), ce are o bandă de frecvenţă limitată (banda nu este infinită), este complet definit (univoc determinat) prin eşantioanele sale {x(nT)}, dacă perioada de eşantionare, T, îndeplineşte condiţia (Nyquist):

$$T \le \frac{1}{2f_M} \tag{8.3}$$

unde f_M este frecvenţa maximă a spectrului semnalului (eşantionat).
Demonstrarea teoremei lui Shannon se bazează pe posibilitatea de a reconstitui spectrul $X(j\omega)$ al semnalului neeşantionat x(t), din spectrul $X_e(j\omega)$ al semnalului eşantionat x[n].
Primul pas al demonstraţiei este de a calcula transformata Fourier a semnalului eşantionat.
Conform (8.2)

$$x[n] = x(t)\cdot \delta_T(t)$$

şi în consecinţă

$$F\{x[n]\} = F\{x(t)\cdot \delta_T(t)\}$$

Din teorema integralei de convoluţie în frecvenţă se obţine că:

$$F^{-1}\{X_1(j\omega)\otimes X_2(j\omega)\} = 2\pi x_1(t)x_2(t) \Rightarrow F\{F^{-1}\{X_1(j)\otimes X_2(j\omega)\}\} = F\{2\pi x_1(t)x_2(t)\}$$

şi în consecinţă

$$F\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}[X_1(j\omega)\otimes X_2(j\omega)] \tag{8.4}$$

Aplicând (8.4) la (8.2) rezultă că:

$$F\{x[n]\} = X_e(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[F\{x(t)\}\otimes F\{\delta_T(t)\}] = \frac{1}{2\pi}[X(j\omega)\otimes F\{\delta_T(t)\}] \tag{8.5}$$

Pentru a calcula transformata Fourier a funcţiei delta periodic se va scrie această funcţie sub forma unei serii Fourier (S.F.E.).
Conform (6.3)

$$\delta_T(t) = \frac{1}{2}\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} e^{jn\Omega t} .$$

Calculul coeficienţilor se face aplicând (6.5):

$$A_{nc} = \frac{2}{T}\int_T \delta_T(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \overset{(6.30)}{=} \frac{2}{T}$$

Rezultă că:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega t} \tag{8.6}$$

şi deci

$$F\{\delta_T(t)\} = F\left\{\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega t}\right\} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\{e^{jn\Omega t}\}$$

O metodă de a calcula transformata Fourier a impulsului $e^{jn\Omega t}$ este de a utiliza rezultatele obţinute a calculul transformatelor Fourier pentru impulsurile sinusoidal/cosinusoidal.

$$F\{e^{jn\Omega t}\} \overset{(6.1)}{=} F\{\cos n\Omega t + j\sin n\Omega t\} = F\{\cos n\Omega t\} + jF\{\sin n\Omega t\} =$$

$$\overset{(6.55);(6.59)}{=} [\pi\delta(\omega - n\Omega) + \pi\delta(\omega + n\Omega)] + j[j\pi\delta(\omega + n\Omega) - j\pi\delta(\omega - n\Omega)]$$

În final se obţine că:

$$F\{e^{jn\Omega t}\} = 2\pi\delta(\omega - n\Omega) \tag{8.7}$$

şi în consecinţă

$$F\{\delta_T(t)\} = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\Omega) = \Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\Omega) \quad (8.8)$$

Aplicând (8.8) la (8.5) se obține că:

$$X_e(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega)\otimes\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(j(\omega - n\Omega))\right] = \frac{\Omega}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[X(j\omega)\otimes\delta(j(\omega - n\Omega))]$$

de unde rezultă că:

$$X_e(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[X(j(\omega - n\Omega))] \quad (8.9)$$

Relația (8.9) pune în evidență un lucru deosebit de important: **spectrul** $X_e(j\omega)$ **al semnalului eşantionat** x[n]**, este o repetare periodică a spectrului** $X(j\omega)$ **al semnalului** x(t) **la multiplii frecvenței de eşantionare** Ω**.**

O ilustrare grafică a teoremei de eşantionare este prezentată în figura 8.4.

În urma analizei acestor reprezentări grafice se pot face următoarele observații:

- Forma de undă a semnalului x(t) este prezentată în figura 8.4a.
- Spectrul $X(j\omega)$ al semnalului x(t) este reprezentat în figura 8.4b. Se observă că spectrul acestui semnal este limitat de o valoare maximă a frecvenței notată $f_M(\omega_M)$;
- Forma de undă a funcției delta periodic $\delta_T(t)$ este prezentată în figura 8.4c. Pe grafic este pusă în evidență perioada de eşantionare T;
- Spectrul $F\{\delta_T(t)\}$ al funcției delta periodic $\delta_T(t)$ este prezentată în figura 8.4d. Se observă că acest spectru este o sumă de componente cu amplitudinea egală cu frecvența de eşantionare Ω. Aceste componente sunt plasate la frecvențe egale cu multiplii frecvenței de eşantionare;
- Forma de undă a semnalului eşantionat x[n] este prezentată în figura 8.4e. Spectrul $X_e(j\omega)$ al semnalului eşantionat, obținut conform (8.9), este prezentat în următoarele trei grafice. Aceste trei reprezentări ale spectrului semnalului eşantionat sunt realizate pentru valori diferite ale frecvenței maxime $f_M(\omega_M)$ ale semnalului x(t). În toate aceste trei cazuri se consideră frecvența de eşantionare Ω ca fiind constantă.
- În figura 8.4f este reprezentat spectrul $X_e(j\omega)$ al semnalului eşantionat în cazul în care este respectată condiția lui Nyquist;
- În figura 8.4g este reprezentat spectrul $X_e(\omega)$ al semnalului eşantionat în cazul în care condiția lui Nyquist este la limită $T = \frac{1}{2f_M}$;
- În figura 8.4h este reprezentat spectrul $X_e(j\omega)$ al semnalului eşantionat în cazul în care nu este respectată condiția lui Nyquist. În acest caz spectrul $X(j\omega)$ nu se poate reconstitui din spectrul $X_e(j\omega)$ al semnalului eşantionat, deoarece funcțiile translatate se suprapun rezultând o funcție deformată în raport cu $X(j\omega)$.

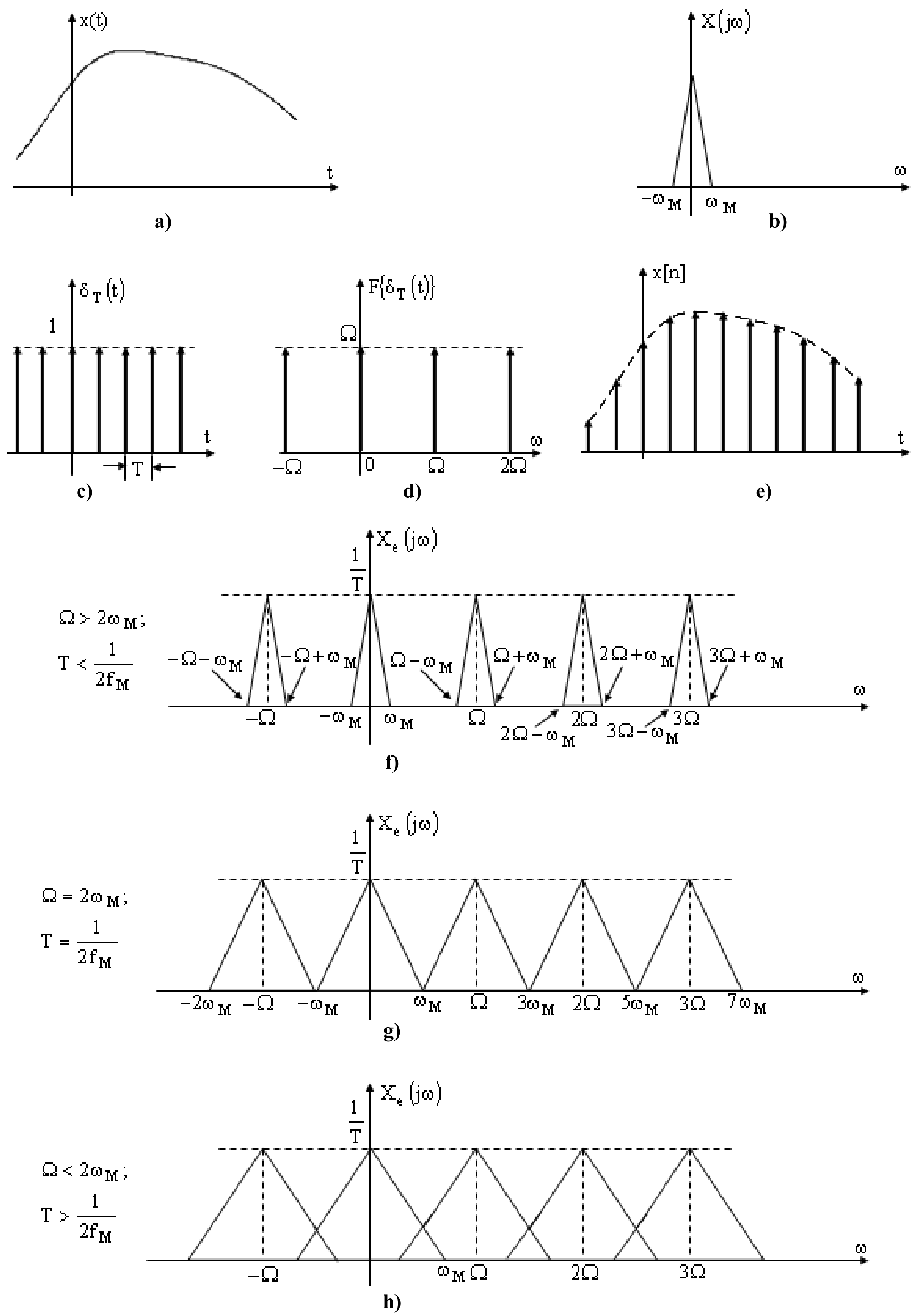


Fig. 8.4: Eşantionarea ideală a unui semnal cu bandă limitată;
a) forma de undă a semnalului x(t); b) spectrul limitat $X(j\omega)$ al semnalului x(t); c) forma de undă a funcției delta periodic $\delta_T(t)$; d) spectrul $F\{\delta_T(t)\}$ al funcției delta periodic $\delta_T(t)$; e) forma de undă a semnalului eşantionat $x[n]$; f) spectrul $X_e(j\omega)$ al semnalului eşantionat în cazul în care se respectă condiția lui Nyquist; g) spectrul $X_e(j\omega)$ al semnalului eşantionat în cazul în care condiția lui Nyquist este la limită; h) spectrul $X_e(j\omega)$ al semnalului eşantionat în cazul în care nu se respectă condiția lui Nyquist;

8.2 RECONSTITUIREA SEMNALULUI DIN EŞANTIOANELE SALE

Reconstituirea semnalului x(t) se realizează prin filtrarea semnalului eşantionat. Pentru această operaţie se foloseşte un FTJ, ce are frecvenţa de tăiere egală cu frecvenţa maximă $f_M(\omega_M)$ a semnalului x(t);

Caracteristica de frecvenţă, ce se mai numeşte în literatură şi funcţie de filtrare, notată $H(j\omega)$, a unui FTJ ideal are următoarea expresie matematică:

$$H(j\omega)=\begin{cases} T=\dfrac{1}{2f_M}=\dfrac{\pi}{\omega_M} & |\omega|<\omega_M \\ 0 & |\omega|>\omega_M \end{cases} \tag{8.10}$$

Transformata Fourier inversă a funcţiei de filtrare, valoare ce va fi folosită în demonstraţiile următoare, are expresia:

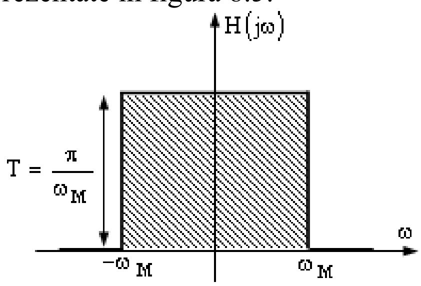
$$F^{-1}\{H(j\omega)\}=h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\omega_M}\int_{-\omega_M}^{\omega_M}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2j\omega_M t}\left(e^{j\omega t}\right)\Big|_{-\omega_M}^{\omega_M}=$$

$$=\frac{e^{j\omega_M t}-e^{-j\omega_M t}}{2j\omega_M t}\overset{(6.1)}{=}\frac{2j\sin(\omega_M t)}{2j\omega_M t}=\sin c(\omega_M t)$$

Deci

$$h(t)=F^{-1}\{H(j\omega)\}=\sin c(\omega_M t) \tag{8.11}$$

Reprezentările grafice ale funcţiei de filtrare $H(j\omega)$ şi a transformatei sale Fourier inverse sunt prezentate în figura 8.5.



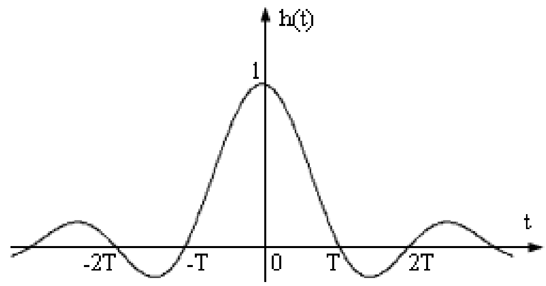


Fig. 8.5: a) Funcţia de filtrare $H(j\omega)$ b) Transformata Fourier inversă $h(t)=F^{-1}\{H(j\omega)\}$ a funcţiei de filtrare

Dacă din punct de vedere fizic reconstituirea semnalului x(t) se realizează prin filtrarea semnalului eşantionat, matematic, recuperarea funcţiei $X(j\omega)$ din $X_e(j\omega)$ este posibilă prin înmulţirea funcţiei $X_e(j\omega)$ cu $H(j\omega)$, adică:

$$X(j\omega)=X_e(j\omega)\cdot H(j\omega) \tag{8.12}$$

Conform teoremei integralei de convoluţie în timp (7.9), rezultă că:

$$F^{-1}\{X(j\omega)\}=F^{-1}\{X_e(j\omega)\}\otimes F^{-1}\{H(j\omega)\}\overset{(8.11)}{\Rightarrow}x(t)=x[n]\otimes h(t)$$

Ţinând cont de modalitatea de scriere a unui semnal eşantionat, (8.2) şi inversând ordinea integrare-sumare rezultă că:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)\otimes h(t) \tag{8.13}$$

Considerând expresia (8.11) a transformatei Fourier inversă a funcţiei de filtrare, rezultă că:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)\otimes \sin c(\omega_M t) \tag{8.14}$$

iar din proprietatea (7.13), convoluția unei funcții cu $\delta(t)$, se obține în final:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\operatorname{sinc}[\omega_M(t-nT)] \tag{8.15}$$

Expresia (8.15) se poate scrie compact astfel:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h_n(t) \tag{8.16}$$

unde s-a notat:

$$h_n(t) = \operatorname{sinc}[\omega_M(t-nT)] = h(t-nT) \tag{8.17}$$

Ilustrarea grafică a procesului de reconstituire a semnalului x(t) prin extrapolare în timp este prezentată în figura 8.6.

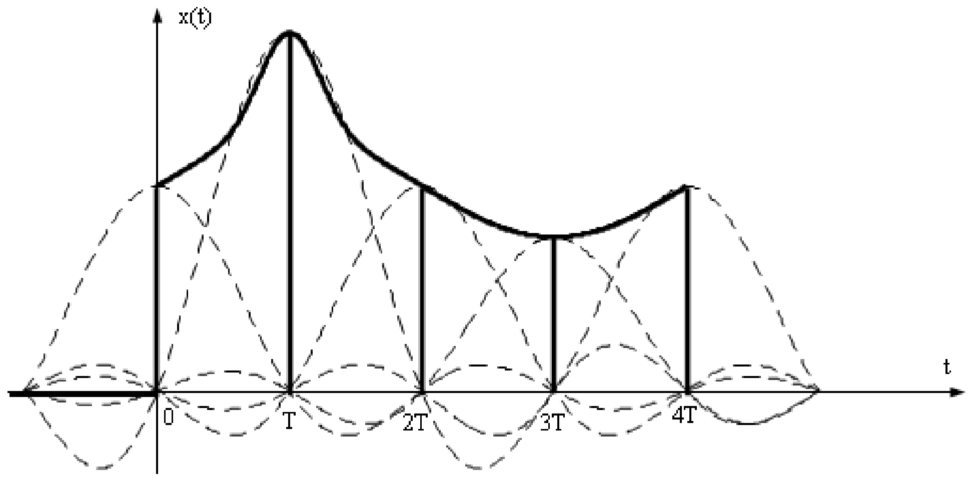


Fig. 8.6: Reconstituirea semnalului x(t) prin extrapolare în timp din funcții eșantion

Concluzie:

- Relația (8.15) exprimă modul de reconstituire în domeniul timp a semnalului x(t) din eșantioanele sale. Pentru aceasta se procedează în modul următor:
- Fiecare funcție de tipul (8.17) $h_n(t) = \operatorname{sinc}[\omega_M(t-nT)]$, ce este centrată la nT, se ponderează cu valoarea funcției x(nT).
- Se realizează sumarea tuturor funcțiilor $h_n(t)$ astfel ponderate.
- Ponderea are efect doar asupra funcției $h_n(t) = \operatorname{sinc}[\omega_M(t-nT)]$ centrate la momentul nT, celelalte funcții (ce se sumează) trecând prin zero la momentul respectiv.

8.3 APLICAȚII

8.3.1. Se consideră un semnal liniar variabil, de durată τ şi cu amplitudinea A. Să se determine banda acestuia, valoarea minimă a frecvenței de eşantionare şi să se reprezinte eşantioanele obținute considerând o valoare convenabilă a perioadei de eşantionare.

Rezolvare

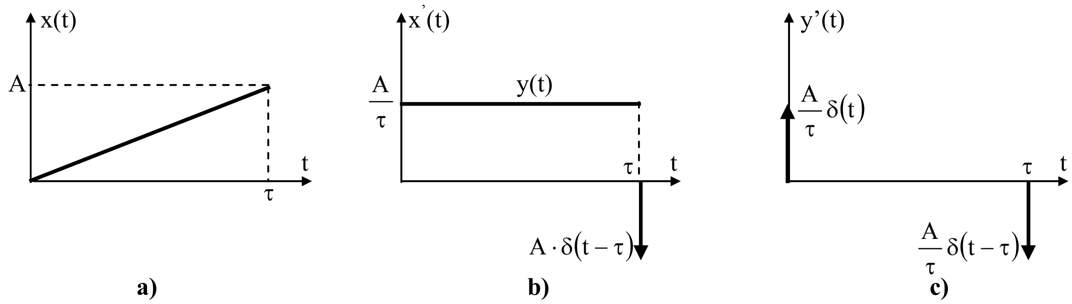


Fig. 8.7: Semnalul liniar variabil

a) forma de undă;
b) prima derivată;
c) derivata a doua.

Semnalul, împreună cu derivatele sale este reprezentat în figura 8.7

$$x(t) = \begin{cases} \frac{A}{\tau} \cdot t & 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

Derivata semnalului este:

$$x'(t) = \frac{A}{\tau} - A \cdot \delta(t-\tau) = y(t) - A \cdot \delta(t-\tau), \text{ unde } y(t) = \frac{A}{\tau}$$

Derivata semnalului y(t) este:

$$y'(t) = \frac{A}{\tau} \cdot \delta(t) - \frac{A}{\tau} \cdot \delta(t-\tau)$$

Transformatele Fourier se calculează în ordine inversă, începând cu $y'(t)$, până la determinarea transformatei semnalului x(t), adică $X(j\omega)$. Pentru aceasta, se vor utiliza proprietățile de întârziere în timp şi de derivare a originalului, (6.13) şi (6.15), precum şi transformata Fourier a impulsului Dirac, (6.30):

$$F(y'(t)) = \frac{A}{\tau} \cdot \left(1 - e^{-j\omega\tau}\right) \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{A}{j\omega\tau} \cdot \left(1 - e^{-j\omega\tau}\right)$$

$$F(x'(t)) = Y(j\omega) - A \cdot F(\delta(t-\tau)) = \frac{A}{j\omega\tau} \cdot \left(1 - e^{-j\omega\tau}\right) - A \cdot e^{-j\omega\tau}$$

$$X(j\omega) = \frac{A}{(j\omega)^2 \tau} \cdot \left(1 - e^{-j\omega\tau}\right) - \frac{A}{j\omega} \cdot e^{-j\omega\tau} = A \cdot \left(\frac{e^{-j\omega\tau} - 1}{\omega^2 \tau} + j \cdot \frac{e^{-j\omega\tau}}{\omega} \right)$$

$$X(j\omega) = A \cdot \left(\frac{\cos(\omega\tau) - j \cdot \sin(\omega\tau) - 1}{\omega^2 \tau} + j \cdot \frac{\cos(\omega\tau) - j \cdot \sin(\omega\tau)}{\omega} \right) =$$

$$= A \cdot \left(\frac{\cos(\omega\tau) - j \cdot \sin(\omega\tau) - 1}{\omega^2 \tau} + j \cdot \frac{\cos(\omega\tau) - j \cdot \sin(\omega\tau)}{\omega} \right) =$$

$$= \frac{A}{\omega^2 \tau} \cdot \left[\cos(\omega\tau) - 1 + \omega\tau \sin(\omega\tau) + j \cdot (\omega\tau \cos(\omega\tau) - \sin(\omega\tau))\right]$$

$$\left|X(j\omega)\right| = \frac{A}{\omega^2\tau}\cdot\sqrt{\left(\cos(\omega\tau)-1+\omega\tau\sin(\omega\tau)\right)^2+\left(\omega\tau\cos(\omega\tau)-\sin(\omega\tau)\right)^2} =$$

$$= \frac{A}{\omega^2\tau}\cdot\sqrt{\begin{aligned}&\cos^2(\omega\tau)+(\omega\tau)^2\sin^2(\omega\tau)+1-2\cos(\omega\tau)-2\omega\tau\sin(\omega\tau)+\\&+2\omega\tau\sin(\omega\tau)\cos(\omega\tau)+(\omega\tau)^2\cos^2(\omega\tau)+\sin^2(\omega\tau)-2\omega\tau\sin(\omega\tau)\cos(\omega\tau)\end{aligned}}$$

$$\left|X(j\omega)\right| = \frac{A}{\omega^2\tau}\cdot\sqrt{2+(\omega\tau)^2-2\cos(\omega\tau)-2\omega\tau\sin(\omega\tau)}$$

Se poate observa cu uşurinţă că spectrul de amplitudini prezintă o nedeterminare în $\omega = 0$. Pentru eliminarea acesteia se foloseşte regula lui l'Hospital:

Fie $L = \frac{A}{\tau}\lim_{\omega\to 0}\frac{\sqrt{2+(\omega\tau)^2-2\cos(\omega\tau)-2\omega\tau\sin(\omega\tau)}}{\omega^2}$.

Rezultă că:

$$L^2 = \frac{A^2}{\tau^2}\lim_{\omega\to 0}\frac{2+(\omega\tau)^2-2\cos(\omega\tau)-2\omega\tau\sin(\omega\tau)}{\omega^4}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \frac{A^2}{\tau^2}\lim_{\omega\to 0}\frac{2\omega\tau^2+2\tau\sin(\omega\tau)-2\tau\sin(\omega\tau)-2\omega\tau^2\cos(\omega\tau)}{4\omega^3} =$$

$$= \frac{A^2}{2}\lim_{\omega\to 0}\frac{1-\cos(\omega\tau)}{\omega^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{A^2}{2}\lim_{\omega\to 0}\frac{\tau\sin(\omega\tau)}{2\omega} = \frac{(A\tau)^2}{4}$$

În consecinţă se obţine:

$$\left|X(j0)\right| = L = \frac{A\tau}{2}$$

Spectrul de amplitudini este reprezentat în figura 8.8

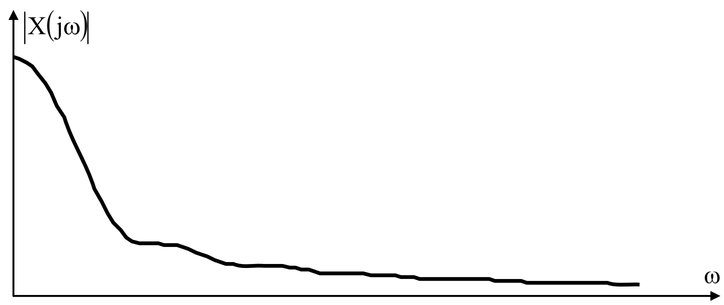


Fig. 8.8: Spectrul de amplitudini al semnalului liniar variabil

Se observă că nu există treceri prin zero ale caracteristicii spectrale din figura 8.8, astfel că pentru a determina banda trebuie calculată pulsaţia la care $\left|X(j\omega)\right|$ devine neglijabil, de exemplu mai puţin de 10% faţă de valoarea maximă, $\left|X(j0)\right|$. Calculele implică rezolvarea unei ecuaţii transcendente, deci nu pot fi efectuate decât numeric. De exemplu, pentru cazul particular $A = 10$ şi $\tau = 2s$, se obţine:

$\left|X(j0)\right| = 10$; $\left|X(j9{,}8)\right| = 0.985$. Rezultă că se poate aproxima banda la valoarea $B = \left[0;\frac{9.8}{2\pi}\right] = [0;1{,}56]\text{Hz}$. Rezultă că pentru eşantionarea semnalului trebuie folosită o frecvenţă de eşantionare $f_e \geq 2\cdot 1{,}56\text{Hz}$; orice valoare mai mare a acestei frecvenţe înseamnă practic considerarea unei valori mai mari a benzii semnalului, adică o precizie mai bună.

Pentru $f_e = 10Hz$, rezultă că se eşantionează semnalul de 10 ori într-o secundă, obţinându-se valorile prezentate în figura 8.9.

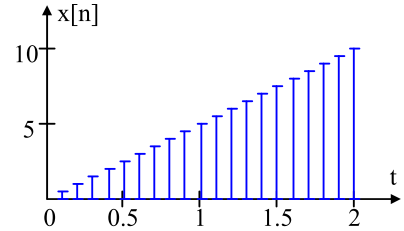


Fig. 8.9: Eşantioanele semnalului x(t)

8.3.2. Se consideră semnalul din figura 8.10. Să se determine banda acestuia, valoarea minimă a frecvenţei de eşantionare şi să se reprezinte eşantioanele obţinute considerând o valoare convenabilă a perioadei de eşantionare.

Rezolvare

$$x(t) = \begin{cases} A\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right) & -\frac{\tau}{2} \le t \le \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

Reprezentarea în timp a semnalului este prezentată în figura 8.10.

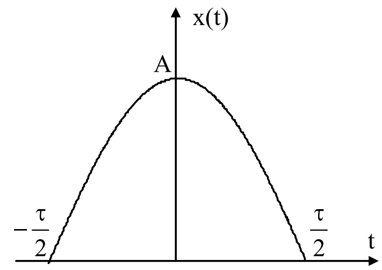


Fig. 8.10: Impulsul cosinusoidal simetric

Deoarece $x(-t) = x(t)$, rezultă că funcţia $x(t)$ este pară.

$$\Rightarrow X(j\omega) = A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\omega t\, dt$$

În urma efectuării calculelor, se obţine:

$$X(j\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\cos(\omega t)dt = 2A\cdot\int_0^{\frac{\tau}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\cos(\omega t)dt = A\int_0^{\frac{\tau}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)t\cdot dt +$$

$$+A\int_0^{\frac{\tau}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)t\cdot dt = \frac{A}{\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)}\left[\sin\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)t\Big|_0^{\frac{\tau}{2}}\right] + \frac{A}{\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)}\left[\sin\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)t\Big|_0^{\frac{\tau}{2}}\right] =$$

$$= \frac{A}{\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\omega\tau}{2}\right) + \frac{A}{\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega\tau}{2}\right) =$$

$$= \left[\frac{A}{\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)} + \frac{A}{\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)}\right]\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \frac{2A\pi\tau}{\pi^2-\omega^2\tau^2}\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Funcţia de densitate spectrală devine:

$$|X(j\omega)| = \frac{2A\pi\tau}{\pi^2-\omega^2\tau^2}\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right),$$

şi este reprezentată grafic în figura 8.11, iar banda este $B = \left[0, \frac{3}{2\tau}\right]$Hz (deoarece la pulsaţia $\omega = \frac{1}{\tau}$, prima la care se anulează

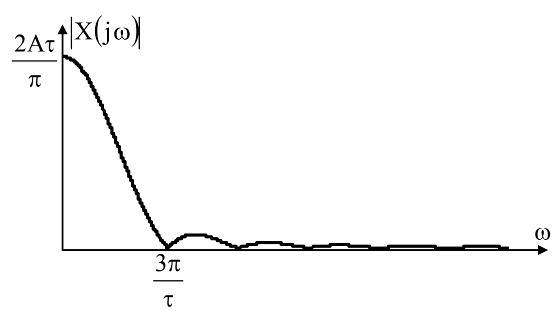


Fig. 8.11: Spectrul de amplitudini

$\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, apare nedeterminarea $\frac{0}{0}$ ce se elimină cu ajutorul regulii lui l'Hospital). Dacă $A=1$ şi $\tau=2s$, rezultă că valoarea minimă a frecvenţei de eşantionare este $f_e = 2\cdot\frac{3}{2\cdot\tau} = \frac{3}{\tau} = \frac{3}{2}Hz$. În figura 8.12 este reprezentat semnalul eşantionat cu frecvenţa $f_e = 2Hz$.

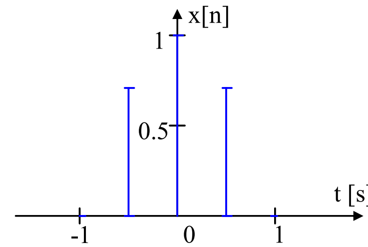


Fig. 8.12: Semnalul eşantionat

8.3.3. Se consideră semnalul din figura 8.13a. Să se determine banda acestuia, valoarea minimă a frecvenţei de eşantionare şi să se reprezinte eşantioanele obţinute considerând o valoare convenabilă a perioadei de eşantionare.

Rezolvare

$$x_\Delta(t) = \begin{cases} A\cdot\left(1+\frac{t}{\tau}\right) & \text{pentru } -\tau \le t \le 0 \\ A\cdot\left(1-\frac{t}{\tau}\right) & \text{pentru } 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

Reprezentarea în timp a semnalului este prezentată în figura 8.13a, iar derivatele sale în figurile 8.13b, c.

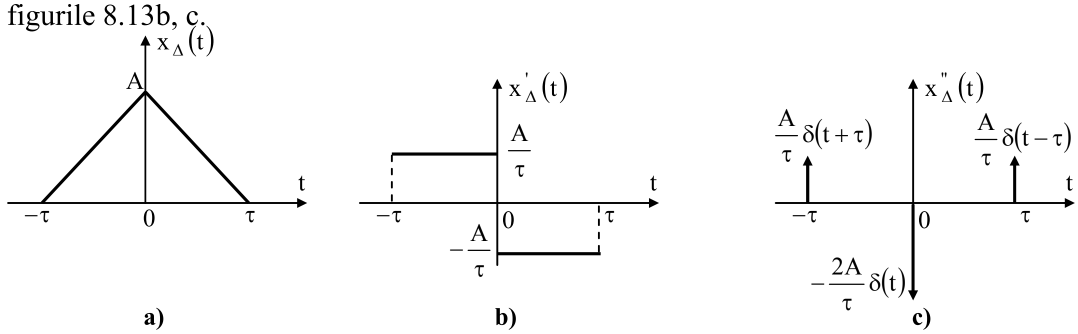


Fig. 8.13: Semnalul triunghiular simetric

a) forma de undă;
b) derivata I;
c) derivata a doua.

Notând funcţia de densitate spectrală $F(x_\Delta(t)) := X(j\omega)$ şi ţinând cont de proprietăţile de întârziere în timp şi de derivare a originalului, (6.13) şi (6.15), precum şi transformata Fourier a impulsului Dirac, (6.30), se obţine:

$$F(x''_\Delta(t)) = \frac{A}{\tau}\left(e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}\right) - \frac{2A}{\tau} = \frac{2A}{\tau}(\cos(\omega\tau)-1) = -\frac{4A}{\tau}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = (j\omega)^2 X(j\omega).$$

Rezultă funcţia de densitate spectrală:

$$X(j\omega) = \frac{4A}{\tau\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \tau A \sin c^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = |X(j\omega)|$$

Funcţia de densitate spectrală este prezentată în graficul din figura 8.14. Se observă (fie din expresia densităţii spectrale, fie din figura 8.14) că banda semnalului este $B = \left[0; \frac{1}{\tau}\right]$, deci frecvenţa de eşantionare trebuie să îndeplinească cerinţa Nyquit: $f_e \ge \frac{2}{\tau}$.

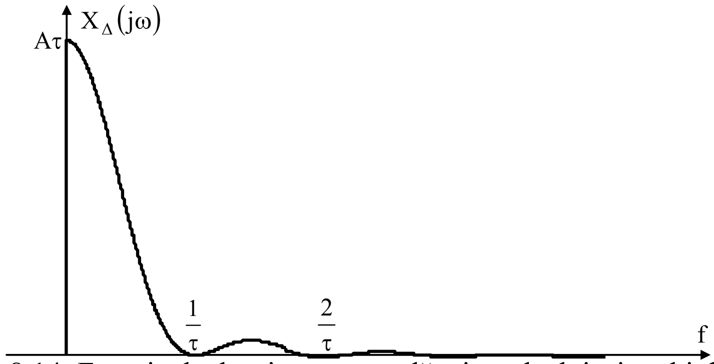


Fig. 8.14: Funcția de densitate spectrală a impulsului triunghiular simetric

Dacă $A=1$ şi $\tau=1s$, rezultă că valoarea minimă a frecvenței de eşantionare este $f_e = 2\cdot\frac{1}{\tau} = 2Hz$. În figura 8.15 este reprezentat semnalul eşantionat cu frecvența $f_e = 4Hz$.

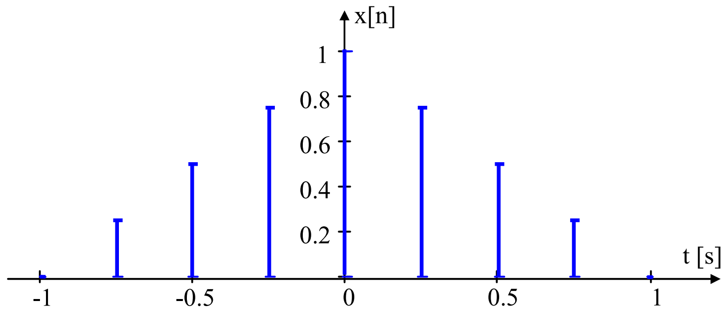


Fig. 8.15: Semnalul eşantionat

Observație:
Determinarea transformatei Fourier (a semnalului neperiodic) permite calculul SFE a semnalului periodic:

Verificare:

$$A_{n_c} = \frac{1}{T}\cdot\int_{-\tau}^{\tau} x(t)\cdot e^{-j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}dt \text{, unde } T = 2\cdot\tau \text{ şi } \omega_0 = \frac{2\cdot\pi}{T} = \frac{\pi}{\tau}$$

$$A_{n_c} = \frac{1}{2\cdot\tau}\cdot\left[\int_{-\tau}^{0}\frac{1}{\tau}\cdot(t+\tau)\cdot e^{-j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}dt + \int_{0}^{\tau}-\frac{1}{\tau}\cdot(t-\tau)\cdot e^{-j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\tau^2}\cdot\left[(t+\tau)\cdot\left.\frac{e^{-j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}}{-j\cdot n\cdot\omega_0}\right|_{-\tau}^{0} + \int_{-\tau}^{0}\frac{e^{-j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}}{j\cdot n\cdot\omega_0}dt - (t-\tau)\cdot\left.\frac{e^{-j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}}{-j\cdot n\cdot\omega_0}\right|_{0}^{\tau} + \int_{0}^{\tau}\frac{e^{-j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}}{j\cdot n\cdot\omega_0}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\tau^2}\cdot\left[\frac{\tau}{-j\cdot n\cdot\omega_0} + \left.\frac{e^{-j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}}{n^2\cdot\omega_0^2}\right|_{-\tau}^{0} + \frac{\tau}{j\cdot n\cdot\omega_0} - \left.\frac{e^{-j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}}{n^2\cdot\omega_0^2}\right|_{0}^{\tau}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\underbrace{\tau^2\cdot\omega_0^2}_{\pi^2}\cdot n^2}\cdot\left(1 - e^{j\cdot n\cdot\omega_0\cdot\tau} + 1 - e^{-j\cdot n\cdot\omega_0\cdot\tau}\right) = \frac{1-\cos(n\cdot\pi)}{\pi^2\cdot n^2} = \frac{2\cdot\sin^2\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)}{\pi^2\cdot n^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sin c^2\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)$$

9. UTILIZAREA TRANSFORMATELOR *LAPLACE* ŞI *Z* ÎN STUDIUL SEMNALELOR

Transformata Fourier (directă şi inversă) realizează o transformare a reprezentării unui semnal din domeniul timp (t) în domeniul frecvenţă $(j\omega)$ şi invers. Generalizând variabila imaginară $j\omega$ cu una complexă: $s = \sigma + j\omega$ (frecvenţa complexă), se obţine un model mai general de reprezentare a semnalelor, anume transformata Laplace.

9.1. TRANSFORMATA *LAPLACE* BILATERALĂ

Fie semnalul x(t) care îndeplineşte condiţia:

$$|x(t)| < \begin{cases} M\cdot e^{\alpha\cdot t} & \text{pentru } t<0 \\ M\cdot e^{\beta\cdot t} & \text{pentru } t>0 \end{cases};\ \alpha > \beta. \tag{9.1}$$

Atunci integrala:

$$L_B(x(t)) := X_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-\sigma\cdot t}\cdot e^{-j\omega t}dt \tag{9.2}$$

se numeşte transformata Laplace bilaterală a semnalului x(t).
Condiţia de convergenţă a integralei (9.2) este:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\cdot e^{-s\cdot t}\right|dt \underset{\left|e^{j\omega t}\right|=1}{=} \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\cdot e^{-\sigma\cdot t}dt < \infty \tag{9.3}$$

Pentru a determina domeniul de convergenţă a transformatei Laplace bilaterale, se evaluează integrala (9.2):

$$X_B(s) = \int_{-\infty}^{0} x(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt + \int_{0}^{\infty} x(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt \le \int_{-\infty}^{0}\left|x(t)\cdot e^{-s\cdot t}\right|dt + \int_{0}^{\infty}\left|x(t)\cdot e^{-s\cdot t}\right|dt <$$

$$< M\cdot\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-\sigma)\cdot t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{(\beta-\sigma)\cdot t}dt\right) \underset{(10.1)}{=} M\cdot\left(\frac{1-\lim\limits_{t\to-\infty} e^{(\alpha-\sigma)\cdot t}}{\alpha-\sigma} + \frac{\lim\limits_{t\to\infty} e^{(\beta-\sigma)\cdot t}-1}{\beta-\sigma}\right)$$

Pentru convergenţă, este evident că cele două limite trebuie să fie nule, ceea ce atrage după sine condiţiile:

$$\left.\begin{matrix}\alpha-\sigma>0\\ \beta-\sigma<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta < \sigma < \alpha \tag{9.4}$$

Pentru a determina transformata Laplace bilaterală inversă, se poate observa că (9.2) reprezintă practic transformata Fourier a semnalului $y(t) = x(t)\cdot e^{-\sigma\cdot t}$:

$$F(y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-\sigma\cdot t}\cdot e^{-j\omega t}dt := X(\sigma + j\omega)$$

Se poate observa că este posibil ca x(t) să nu posede transformată Fourier, dar y(t) da, cu condiţia respectării condiţiei de convergenţă (9.4).
În conformitate cu (6.10), originalul y(t) se obţine cu relaţia:

$$y(t) = x(t)\cdot e^{-\sigma\cdot t} = F^{-1}(X(\sigma + j\omega)) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)\cdot e^{j\omega t}\cdot e^{\sigma\cdot t}d\omega$$

Dar $s = \sigma + j\omega \Rightarrow d\omega = \frac{1}{j}\cdot ds$; cum $-\infty < \omega < \infty \Rightarrow \sigma - j\infty < s < \sigma + j\infty$, astfel că:

$$x(t) = L_B^{-1}(X_B(s)) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) \cdot e^{s \cdot t} ds, \tag{9.5}$$

expresie ce reprezintă transformata Laplace bilaterală inversă (formula de inversiune Mellin-Fourier), cu condiția ca σ să îndeplinească condiția de convergență (9.4). Din acest motiv, σ se mai numeşte şi factor de convergență.
În figura 9.1 este reprezentat domeniul de convergență al transformatei Laplace bilaterale, pentru cazul $\beta < 0; \alpha > 0$.
Semnalul x(t) posedă ambele transformate (Fourier şi Laplace) dacă domeniul de convergență include şi axa imaginară.

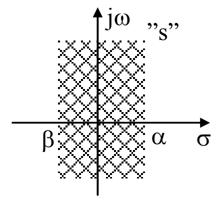


Fig. 9.1
Domeniul de convergență al transformatei Laplace bilaterale

9.2. TRANSFORMATA *LAPLACE* UNILATERALĂ

În analiza şi proiectarea sistemelor şi circuitelor liniare, semnalul de excitație (originalul) x(t) este de obicei nul pentru $t < 0$ (semnal cauzal). Un astfel de semnal poate fi scris şi sub forma:

$$x(t) = x(t) \cdot u(t), \tag{9.6}$$

,

unde u(t) este semnalul treaptă unitate (Heaviside).
În astfel de cazuri se foloseşte transformata Laplace unilaterală, definită prin relația:

$$L(x(t)) := X(s) = \int_0^\infty x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt, \tag{9.7}$$

în care limita inferioară de integrare se consideră $t = 0_-$, pentru a se putea ține cont şi de impulsurile Dirac $\delta(t)$ ce apar în cazul eventualelor discontinuități în momentul $t = 0$.
Cum transformata Fourier nu impune cerința ca originalul să fie cauzal, din acest punct de vedere este mai puțin restrictivă.
Condiția de convergență (9.3) devine:

$$\int_0^\infty |x(t)| \cdot e^{-\sigma \cdot t} dt < \infty, \tag{9.8}$$

iar condiția (9.1) pe care trebuie să o îndeplinească originalul x(t) se transformă în:

$$|x(t)| < M \cdot e^{c \cdot t} \ ; \ \forall t \in R_+ \tag{9.9}$$

(să existe o exponențială în raport cu care $|x(t)|$ nu creşte mai rapid); c se mai numeşte şi **indice de creştere** al semnalului x(t).
Valoarea minimă a lui c, care transformă (9.9) în egalitate, se numeşte **abscisă de convergență absolută** şi se notează σ_a. Altfel spus, σ_a este valoarea minimă a variabilei σ pentru care este îndeplinită condiția de convergență (9.8).
Condiția de convergență a transformatei Fourier este

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty, \tag{9.10}$$

ceea ce atrage după sine cerința ca $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$, pe când în cazul transformatei Laplace (unilaterală sau bilaterală), limita respectivă poate fi nenulă, originalul evoluând, conform (9.9), sub exponențiala $e^{c \cdot t}$.
Ca urmare, din punctul de vedere al convergenței, transformata Fourier este mai restrictivă decât transformata Laplace unilaterală.
Trecerea de la transformata Laplace unilaterală la transformata Fourier şi invers se poate face prin substituțiile $s \to j\omega$, respectiv $j\omega \to s$, numai dacă sunt îndeplinite simultan două condiții:

- semnalul este cauzal;
- abscisa de convergență absolută este nulă $(\sigma_a = 0)$, ceea ce implică îndeplinirea relației (9.10) .

Relația de definiție a transformatei Laplace unilaterale inverse este (9.5), în care trebuie îndeplinită condiția $\sigma > \sigma_a$. Curba din planul complex „s” pe care se integrează în (9.5) (conturul Bromwich) este prezentată în figura 9.2.

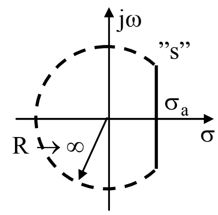


Fig. 9.2
Conturul Bromwich

Întrucât transformata Laplace unilaterală este cea mai folosită, în continuare se va renunța la atributul “unilaterală” fiind denumită pe scurt doar ca ”**transformata Laplace**”.

9.3. TRANSFORMATA *Z*

Fie x(t) un semnal nul pentru $t < 0$ (semnal cauzal). Semnalul eşantionat (cu perioada de eşantionare T_e; $T_e = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_e} = 2 \cdot \pi \cdot f_e$), $x_e(t)$ sau x[n], definit prin relația (8.2), se poate exprima ca mai jos:

$$x[n] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n \cdot T_e) \cdot \delta(t - n \cdot T_e) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n \cdot T_e) \cdot \delta(t - n \cdot T_e) \tag{9.11}$$

Transformata Laplace a semnalului eşantionat se poate calcula pornind de la (9.7), ținând cont de proprietatea de liniaritate (care este evidentă):

$$X_e(s) = L(x[n]) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n \cdot T_e) \cdot L(\delta(t - n \cdot T_e)) \tag{9.12}$$

Dar (după cum se va arăta ulterior, cu precizarea că proprietățile transformatei Laplace şi demonstrațiile sunt asemănătoare cu cele corespunzătoare ale transformării Fourier):

$$L(\delta(t - n \cdot T_e)) = 1 \cdot e^{-n \cdot T_e \cdot s} \tag{9.13}$$

Rezultă că:

$$X_e(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n \cdot T_e) \cdot e^{-n \cdot T_e \cdot s} \tag{9.14}$$

Cu notația:

$$e^{T_e \cdot s} := z, \tag{9.15}$$

înlocuindu-se în (9.14) se obține:

$$X(z) := X_e(s)\Big|_{e^{T_e \cdot s} = z} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n \cdot T_e) \cdot z^{-n}, \tag{9.16}$$

care reprezintă **transformata *Z* a semnalului eşantionat**:

$$Z(x[n]) \text{ sau } Z(x(n \cdot T_e)) := X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n \cdot T_e) \cdot z^{-n} \tag{9.17}$$

Observații:

1. Dacă seria (9.17) există şi este convergentă pentru $n \in Z$ (adică şi pentru valori negative), expresia corespunzătoare se numeşte transformata *Z* bilaterală. De obicei însă se lucrează cu semnale deterministe, astfel că transformata este cea unilaterală, sau, pe scurt, transformata *Z*;
2. Seria (9.17) este convergentă dacă $r \le |z| \le R$, zonă numită domeniu de convergență, după cum se poate observa în figura 9.3;

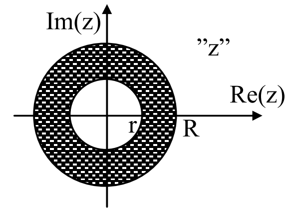


Fig. 9.3
Domeniul de convergență a transformatei *Z*

3. Relația (9.15) reprezintă o transformare conformă a planului ”z” $(z = x + j \cdot y)$ în planul ”s” $(s = \sigma + j \cdot \omega)$, de fapt cea mai simplă dintre ele, şi anume scrierea sub forma trigonometrică a unui număr complex:

$$z = e^{T_e \cdot s} = e^{T_e \cdot (\sigma + j\omega)} = e^{\sigma T_e} \cdot e^{j\omega T_e} \Rightarrow \begin{cases} |z| = e^{\sigma T_e} \\ \arg(z) = \omega T_e \end{cases} \tag{9.18}$$

Se vor prezenta două exemple de transformare a unor traiectorii în planul ”s” în cele corespunzătoare în planul ”z”:

3.1.Fie verticala $s = \sigma$ în planul „s”. Traiectoria corespunzătoare în planul „z” este cercul de rază $R = e^{\sigma T_e}$ (figura 9.4a) ;

3.2.Conturul (Γ) abcOdef care corespunde fâşiei de bază (de lățime ω_e) în semiplanul stâng al planului „s”, se transformă într-un cerc (cu $R = 1$ pentru că $\sigma = 0$), unde cele două tăieturi corespund segmentelor orizontale fe şi ab (figura 9.4b).

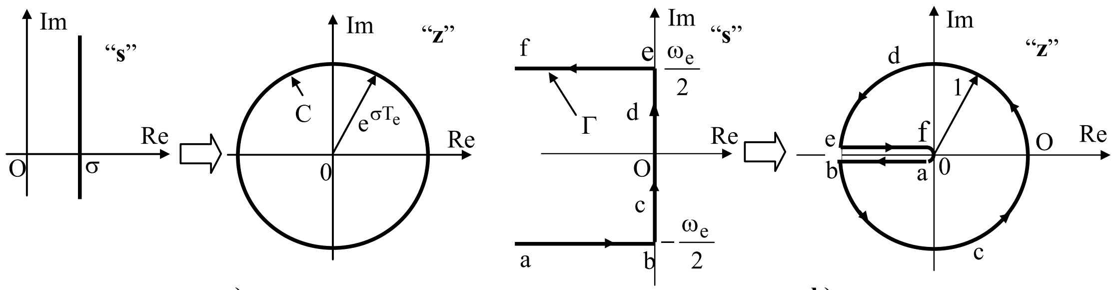


Fig. 9.4 Traiectorii corespondente în planele „s” şi „z”

4. Transformările traiectoriilor transferă (şi) domeniile de convergență ale transformatei Laplace (bilaterală sau unilaterală) în planul ”s” în domeniile de convergență ale transformatei Z (bilaterală sau unilaterală) în planul ”z”.

Pentru determinarea **transformării Z inverse**, se porneşte tot de la transformata Laplace. Astfel, semnalul original x(t) se poate determina cu ajutorul transformatei sale Laplace cu ajutorul (9.5):

Dacă se înlocuieşte $t = nT_e$, (9.5) devine:

$$x(nT_e) := x[n] = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) \cdot e^{s \cdot n \cdot T_e} ds \tag{9.19}$$

Folosind substituția (9.15) în (9.19) şi ținând cont de relațiile evidente:

$e^{T_e \cdot s} = z \Rightarrow s = \frac{1}{T_e} \cdot \ln(z) \Rightarrow ds = \frac{1}{T_e \cdot z} \cdot dz$ (care transformă domeniul din stânga dreptei $\sigma - j\infty, \sigma + j\infty$ din figura 9.4a în interiorul cercului din figura 9.4b), rezultă:

$$x[n] = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint_C \frac{1}{T_e} \cdot X(s) \Big|_{e^{T_e \cdot s} = z} \cdot z^{n-1} dz \tag{9.20}$$

Dar $\frac{1}{T_e} \cdot X(s) \Big|_{e^{T_e \cdot s} = z} = \frac{1}{T_e} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\sigma - j \cdot k \cdot \omega_e) \Big|_{k=0} = X_e(s) \Big|_{e^{T_e \cdot s} = z} = X(z)$, unde s-a considerat fâşia de bază din planul „s”, prin adoptarea indicelui $k = 0$ (ramura sau valoarea principală a funcției complexe ln(z)). Înlocuind ultima relație în (9.20) şi luând $T_e = 1$, rezultă:

$$x[n] = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint_C X(z) \cdot z^{n-1} dz \tag{9.21}$$

Expresia (9.21) defineşte **transformata** Z **inversă**.

9.4. PROPRIETĂȚI ALE TRANSFORMATELOR *LAPLACE* ŞI *Z*

Întrucât aceste proprietăți sunt asemănătoare, ca şi demonstrațiilee lor, ele vor fi prezentate unitar. Se vor folosi notații de tipul x(t) pentru semnalele cauzale cărora le corespund transformate Laplace de tipul X(s) sau L(x(t)) şi notații de tipul $x_e(t)$ sau x[n] sau $x(nT_e)$ pentru semnalul eşantionat din x(t) cu perioada de eşantionare T_e, căruia îi corespunde transformata *Z* X(z) sau Z(x[n]) sau $Z(x(nT_e))$. Se vor prezenta în cele ce urmează câteva din cele mai importante proprietăți ale transformatelor Laplace şi *Z*.

9.4.1. Liniaritatea

$$L\left(\sum_{k=1}^{N} c_k x_k(t)\right) = \sum_{k=1}^{N} c_k X_k(s) \qquad (9.22_L)$$

$$Z\left(\sum_{k=1}^{N} c_k x_k[n]\right) = \sum_{k=1}^{N} c_k X_k(z) \qquad (9.22_Z)$$

unde coeficienții c_k sunt constanți.

Demonstrațiile sunt evidente, reducându-se la liniaritatea integralei, respectiv a sumei (seriei).

9.4.2. Teorema întârzierii (deplasării în timp)

Dacă semnalul x(t) este întârziat cu durata τ, respectiv semnalul $x_e(t)$ este întârziat cu d perioade de eşantionare, atunci:

$$L(x(t-\tau)) = e^{-\tau\cdot s}\cdot X(s) \qquad (9.23_L)$$

$$Z(x[n-d]) = z^{-d}\cdot X(z) \qquad (9.23_Z)$$

Demonstrație:

a) Laplace:

Conform (9.7): $L(x(t-\tau)) = \int_0^\infty x(t-\tau)\cdot e^{-s\cdot t}dt \underset{t-\tau=u}{=} \int_{-\tau}^\infty x(u)\cdot e^{-s\cdot(u+\tau)}du$.

Dar semnalul x(u) este cauzal deci $u<0 \Rightarrow x(u)=0$, astfel că:

$$L(x(t-\tau)) = e^{-s\cdot\tau}\cdot\int_0^\infty x(u)\cdot e^{-s\cdot(u+\tau)}du = e^{-s\cdot\tau}\cdot X(s)$$

b) *Z*:

$$Z(x[n-d]) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k\cdot T_e - d\cdot T_e)\cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x((k-d)\cdot T_e)\cdot z^{-k}$$

Cu notația $k-d=p$, rezultă:

$$Z(x[n-d]) = \sum_{p=-d}^{\infty} x(p\cdot T_e)\cdot z^{-p-d} = z^{-d}\cdot\sum_{p=0}^{\infty} x(p\cdot T_e)\cdot z^{-p} = z^{-d}\cdot X(z),$$

întrucât $x_e(t)=0$ pentru $t<0$.

Observație:

Se poate interpreta z^{-1} ca fiind operatorul de întârziere cu o perioadă T_e.

9.4.3. Teorema deplasării în frecvență (a înmulțirii cu o exponențială)

$$L\left(x(t)\cdot e^{s_0\cdot t}\right) = X(s-s_0) \qquad (9.24_L)$$

$$Z\left(x[n]\cdot e^{\pm a\cdot t}\right) = X\left(z\cdot e^{\mp a\cdot T_e}\right) \qquad (9.24_Z)$$

Demonstrație

a) Laplace:

$$L\left(x(t)\cdot e^{s_0\cdot t}\right) = \int_0^\infty x(t)e^{s_0\cdot t}\cdot e^{-s\cdot t}dt = \int_0^\infty x(t)\cdot e^{-(s-s_0)\cdot t}dt = X(s-s_0)$$

b) *Z*:

$$Z\left(x[n]\cdot e^{\pm a\cdot t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}x\left(n\cdot T_e\right)\cdot e^{\pm a\cdot n\cdot T_e}\cdot z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x\left(n\cdot T_e\right)\cdot\left(e^{\mp a\cdot T_e}\cdot z\right)^{-n}=X\left(z\cdot e^{\mp a\cdot T_e}\right)$$

9.4.4. Modificarea scării de reprezentare (Teorema asemănării)

$$L\left(x(a\cdot t)\right)=\frac{1}{|a|}\cdot X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (9.25_L)$$

$$Z\left(a^t\cdot x[n]\right)=X\left(\frac{z}{a^{T_e}}\right) \qquad (9.25_Z)$$

Demonstrație

a) Laplace:

$$L\left(x(a\cdot t)\right)=\int_0^{\infty}x(a\cdot t)\cdot e^{-s\cdot t}dt\underset{a\cdot t=u}{=}\frac{1}{|a|}\cdot\int_0^{\infty}x(u)\cdot e^{-\frac{s}{a}\cdot u}dt=\frac{1}{|a|}\cdot X\left(\frac{s}{a}\right)$$

b) *Z*:

$$Z\left(a^t\cdot x[n]\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n\cdot T_e}\cdot x\left(n\cdot T_e\right)\cdot z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x\left(n\cdot T_e\right)\cdot\left(\frac{z}{a^{T_e}}\right)^{-n}=X\left(\frac{z}{a^{T_e}}\right)$$

9.4.5. Derivarea originalului (Teorema anticipării sau avansului în timp)

$$L\left(x'(t)\right)=s\cdot X(s)-x(0_-) \qquad (9.26_L)$$

$$Z\left(x[n+1]\right)=z\cdot\left(X(z)-x(0)\right) \qquad (9.26_Z)$$

Demonstrație:

a) Laplace:

$$L\left(x'(t)\right)=\int_{0_-}^{\infty}x'(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt=x(t)\cdot e^{-s\cdot t}\Big|_{0_-}^{\infty}+s\cdot\int_{0_-}^{\infty}x(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt=s\cdot X(s)+\lim_{t\to\infty}\left(x(t)\cdot e^{-s\cdot t}\right)-x(0_-)$$

Dar, conform (9.9) rezultă că $\left|x(t)\cdot e^{-s\cdot t}\right|=\left|x(t)\right|\cdot e^{-\sigma\cdot t}<M\cdot e^{(c-\sigma)\cdot t}$.

Cum $\sigma>c$, rezultă că $\lim_{t\to\infty}\left(x(t)\cdot e^{-s\cdot t}\right)=0$, astfel că ($9.26_L$) este demonstrată.

Generalizare:

$$L\left(x^{(n)}(t)\right)=s^n\cdot X(s)-\left(s^{n-1}\cdot x(0_-)+s^{n-2}\cdot x'(0_-)+...+x^{(n-1)}(0_-)\right) \qquad (9.27_L)$$

Demonstrația se poate face cu uşurință prin inducție.

b) *Z*:

$$Z\left(x[n+1]\right)=\sum_{n=0}^{\infty}x\left(nT_e+T_e\right)\cdot z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x\left[(n+1)\cdot T_e\right]\cdot z^{-n}$$

Dacă se notează $n+1=k$, rezultă:

$$Z\left(x_e\left(t+T_e\right)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}x\left(k\cdot T_e\right)\cdot z^{-k+1}=z\cdot\sum_{k=1}^{\infty}x\left(k\cdot T_e\right)\cdot z^{-k}=z\cdot\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}x\left(k\cdot T_e\right)\cdot z^{-k}}_{X(z)}-x(0)\right).$$

Generalizare:

$$Z\left(x[n+d]\right)=z^d\cdot X(z)-\left(z^d\cdot x(0)+z^{d-1}\cdot x\left(T_e\right)+...+z\cdot x\left[(d-1)\cdot T_e\right]\right) \qquad (9.27_Z)$$

Demonstrația este asemănătoare cu cea de mai sus, modificarea fiind că $(n+1)\cdot T_e$ devine $(n+d)\cdot T_e$, indicele de sumare, k, variază între *d* şi ∞, deci pentru a se obține transformata Z trebuie introduşi şi scoşi din sumă *d* termeni, adică cei din (9.27_Z).

9.4.6. Teorema valorii inițiale

$$x(0_+) = \lim_{s\to\infty} s\cdot X(s) \qquad (9.28_L)$$

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) \qquad (9.28_Z)$$

Demonstrație:

a) Laplace:

- Dacă x(t) este continuă în origine $\Rightarrow x(0_-) = x(0_+) = x(0)$ şi în conformitate cu (9.26_L), rezultă:

$$x(0) = s\cdot X(s) - L(x'(t)) = \lim_{s\to\infty}(s\cdot X(s) - L(x'(t))) = \lim_{s\to\infty} s\cdot X(s) - \underbrace{\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty x'(t)\cdot \underbrace{e^{-s\cdot t}}_{0}dt}_{0} =$$

$$= \lim_{s\to\infty} s\cdot X(s)$$

- Dacă x(t) este discontinuă în origine, atunci $x(0) = (x(0_+) - x(0_-))\cdot u(t)$, astfel că derivata în origine devine $x'(0) = (x(0_+) - x(0_-))\cdot \delta(t)$. Introducând aceasta în (9.26_L), se obține:

$$s\cdot X(s) - x(0_-) = L(x'(t)) = \int_{0_-}^{\infty} x'(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt = \int_{0_-}^{0_+} x'(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt + \int_{0_+}^{\infty} x'(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt =$$

$$= \int_{0_-}^{0_+}(x(0_+) - x(0_-))\cdot\delta(t)dt + \int_{0_+}^{\infty} x'(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt =$$

$$= (x(0_+) - x(0_-))\cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt}_{1} + \int_{0_+}^{\infty} x'(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt = x(0_+) - x(0_-) + \int_{0^+}^{\infty} x'(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt$$

$$\Rightarrow x(0_+) = \lim_{s\to\infty} s\cdot X(s).$$

b) *Z*:

Examinând (9.16), se observă că dacă $z\to\infty$, atunci se anulează toți termenii din sumă, (deoarece au exponentul negativ), cu excepția primului, x(0), de unde rezultă (9.28_Z).

9.4.7. Teorema valorii finale

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0}(s\cdot X(s)) \qquad (9.29_L)$$

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}((z-1)\cdot X(z)) \qquad (9.29_Z)$$

Demonstrație:

a) Laplace:

Conform demonstrației teoremei (9.28_L), rezultă:

$$s\cdot X(s) = x(0_+) + \int_{0^+}^{\infty} x'(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt$$

Rezultă că:

$$\lim_{s\to 0}(s\cdot X(s)) = x(0_+) + \lim_{s\to 0}\int_{0^+}^{\infty} x'(t)\cdot \underbrace{e^{-s\cdot t}}_{1}dt = x(0_+) + \lim_{s\to 0}\left(\lim_{t\to\infty} x(t) - x(0_+)\right) = \lim_{t\to\infty} x(t)$$

b) *Z*:

Se va considera diferența $d(nT_e)$ între două eşantioane consecutive ale semnalului (care este proporțională cu derivata sa discretă):

$$d(n\cdot T_e) = x((n+1)\cdot T_e) - x(n\cdot T_e)$$

Se va determina transformata Z a acestui semnal pe două căi:

a) $D(z) = Z(x((n+1)\cdot T_e) - x(n \cdot T_e)) = \sum_{n=0}^{\infty}[x((n+1)\cdot T_e) - x(n \cdot T_e)]\cdot z^{-n}$,

de unde rezultă că:

$$\lim_{z\to 1} D(z) = \sum_{n=0}^{\infty}[x((n+1)\cdot T_e) - x(n \cdot T_e)] = \lim_{n\to\infty} x(n \cdot T_e) - x(0) \tag{9.30}$$

b) Folosind (9.22_Z) şi (9.28_Z), D(z) se exprimă astfel:

$$D(z) = Z(x(n+1)\cdot T_e) - Z(x(n \cdot T_e)) = z\cdot(X(z) - x(0)) - X(z),$$

de unde rezultă că:

$$D(z) = (z-1)\cdot X(z) - x(0) \Leftrightarrow \lim_{z\to 1} D(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot X(z) - x(0) \tag{9.31}$$

Din (9.30) şi (9.31) rezultă (9.29_Z).

Observaţie:

D(z) prezentată sub forma (9.31), se consideră a fi transformata *Z* a derivatei discrete a semnalului $x_e(t)$.

9.4.8. Teorema derivării în frecvenţă (multiplicarea în timp)

$$L(-t\cdot x(t)) = \frac{dX(s)}{ds} \tag{9.32_L}$$

$$Z(t\cdot x[n]) = -T_e\cdot z\cdot\frac{dX(z)}{dz} \tag{9.32_Z}$$

Demonstraţie:

a) Laplace:

$$\frac{dX(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^{\infty} x(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt = \int_0^{\infty}\frac{d}{ds}\left(x(t)\cdot e^{-s\cdot t}\right)dt = \int_0^{\infty}\left(-t\cdot x(t)\cdot e^{-s\cdot t}\right)dt = L(-t\cdot x(t))$$

Generalizare:

$$L\left((-t)^n\cdot x(t)\right) = \frac{d^nX(s)}{ds^n} \tag{9.33_L}$$

b) *Z*:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n\cdot T_e)\cdot z^{-n} \Rightarrow \frac{dX(z)}{dz} = -\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x(n\cdot T_e)\cdot z^{-n-1} = -z^{-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x(n\cdot T_e)\cdot z^{-n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -z\cdot\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x(n\cdot T_e)\cdot z^{-n} \tag{9.34}$$

Dar, conform definiţiei (9.16), membrul stâng al relaţiei (9.32_Z) este:

$$Z(t\cdot x[n]) = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot T_e\cdot x(n\cdot T_e)\cdot z^{-n} = T_e\cdot\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x(n\cdot T_e)\cdot z^{-n} \tag{9.35}$$

Din (9.34) şi (9.35) se obţine relaţia (9.32_Z).

Generalizarea nu mai este la fel de simplă ca în cazul transformatei Laplace. Din acest motiv, în cazul derivatelor de ordin superior se poate proceda recursiv, ca în exemplul următor :

$$Z\left(t^2\cdot x_e(t)\right) = Z(t\cdot(t\cdot x_e(t))) = -T_e\cdot z\cdot\frac{d}{dz}(Z(t\cdot x_e(t))) = -T_e\cdot z\cdot\frac{d}{dz}\left(-T_e\cdot z\cdot\frac{dX(z)}{dz}\right) =$$

$$= T_e^2\cdot\left(z\cdot\frac{dX(z)}{dz} + z^2\cdot\frac{d^2X(z)}{dz^2}\right)$$

Pentru calculul transformatei $Z\left(t^3\cdot x_e(t)\right)$ se procedează asemănător, pornind de la expresia stabilită mai sus, ş.a.m.d.

9.4.9. Teorema integrării originalului (sumării)

$$L\left(\int_0^t x(\tau)d\tau\right)=\frac{X(s)}{s} \qquad (9.36_L)$$

$$Z\left(\sum_{k=0}^{p} x[k]\right)=\frac{z}{z-1}\cdot X(z) \qquad (9.36_Z)$$

Demonstrație:

a) Laplace:

$$L\left(\int_0^t x(\tau)d\tau\right)=\int_0^\infty\left(\int_0^t x(\tau)d\tau\right)\cdot e^{-s\cdot t}dt$$

Se aplică metoda integrării prin părți:

$$\left.\begin{aligned} u=\int_0^t x(\tau)d\tau \Rightarrow u'=x(t)\\ v'=e^{-s\cdot t}\Rightarrow v=-\frac{e^{-s\cdot t}}{s}\end{aligned}\right\}\Rightarrow L\left(\int_0^t x(\tau)d\tau\right)=-\frac{e^{-s\cdot t}}{s}\cdot\left.\int_0^t x(\tau)d\tau\right|_0^\infty+\frac{1}{s}\cdot\int_0^\infty x(t)\cdot e^{-s\cdot t}d\tau=\frac{X(s)}{s}.$$

Faptul că $-\frac{e^{-s\cdot t}}{s}\cdot\left.\int_0^t x(\tau)d\tau\right|_0^\infty=0$ se demonstrează printrun procedeu similar cu cel folosit în paragraful 9.4.5a.

b) *Z*:

Funcția $\sum_{k=0}^{p} x[k]$ este proporțională cu integrala discretă a semnalului. Rezultă că:

$$\begin{aligned}Z\left(\sum_{k=0}^{p} x(k\cdot T_e)\right)&=\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{p} x(k\cdot T_e)\right)\cdot z^{-p}=\\ &=x(0)+[x(0)+x(1)]\cdot z^{-1}+[x(0)+x(1)+x(2)]\cdot z^{-2}+\ldots=\\ &=x(0)\cdot\left(1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots\right)+x(1)\cdot z^{-1}\cdot\left(1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots\right)+\ldots=\\ &=\left(\underbrace{1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots}_{\frac{1}{1-z^{-1}}}\right)\cdot\left(\underbrace{x(0)+x(1)\cdot z^{-1}+x(2)\cdot z^{-2}+\ldots}_{X(z)}\right)=\frac{z}{z-1}\cdot X(z)\end{aligned}$$

Observație:

Tot în legătură cu suma eşantioanelor, este evidentă (şi) următoarea relație:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x[n]=\lim_{z\to 1}[X(z)] \qquad (9.37)$$

cunoscută şi sub numele de **teorema sumei**. Acest rezultat se obține imediat din (9.16), considerând $z=1$.

9.4.10. Teorema integrării imaginii (sumării)

$$L\left(\frac{x(t)}{t}\right)=\int_s^\infty X(p)dp \qquad (9.38)$$

Demonstrație:

Fie $Y(s)=\int_s^\infty X(p)dp=\Phi(\infty)-\Phi(s)\Rightarrow Y'(s)=-\Phi'(s)=-X(s)$.

Fie de asemenea y(t) originalul imaginii Y(s). Conform (9.32_L), rezultă că:

$$Y'(s)=L(-t\cdot y(t))\Leftrightarrow -X(s)=L(-t\cdot y(t))\Leftrightarrow L(x(t))=L(t\cdot y(t))\Rightarrow y(t)=\frac{x(t)}{t},$$

adică $L\left(\frac{x(t)}{t}\right)=\int_s^{\infty}X(p)dp$. Teorema este demonstrată.

9.4.11. Produsul de convoluție

Produsul de convoluție a două semnale analogice, $x_1(t)$ şi $x_2(t)$, a fost definit de (7.1) şi va fi reamintit în continuare:

$$x(t)\overset{def}{=}\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)d\tau:=x_1(t)\otimes x_2(t)$$

Cum semnalele $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ sunt cauzale, rezultă că $x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)=0$ pentru $\tau<0$ sau $\tau>t$, astfel că produsul de convoluție devine:

$$x_1(t)\otimes x_2(t)=\int_0^t x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)d\tau \qquad (9.39)$$

În cazul semnalelor eşantionate, $x_1[n]$ şi $x_2[n]$ (cauzale de asemenea), produsul de convoluție se defineşte asemănător, integrala devenind sumă:

$$x[n]\overset{def}{=}\sum_{k=0}^{n}x_1(k\cdot T_e)\cdot x_2((n-k)\cdot T_e):=x_{1_e}(t)\otimes x_{2_e}(t) \qquad (9.40)$$

Produsul de convoluție este comutativ:

Demonstrație:

a) Laplace:

Conform (9.39), $x_2(t)\otimes x_1(t)=\int_0^t x_2(\tau)\cdot x_1(t-\tau)d\tau$

Cu schimbarea de variabilă $t-\tau=u$, rezultă:

$$d\tau=-du;\tau=0\Rightarrow u=t;\tau=t\Rightarrow u=0,$$

Astfel că se obține:

$$x_2(t)\otimes x_1(t)=-\int_t^0 x_2(t-u)\cdot x_1(u)du=\int_0^t x_1(u)\cdot x_2(t-u)du=x_1(t)\otimes x_2(t)$$

b) *Z*:

$$x_2[n]\otimes x_1[n]=\sum_{k=0}^{n}x_2(k\cdot T_e)\cdot x_1((n-k)\cdot T_e)$$

Cu substituția $n-k=u$, rezultă:

$$x_2[n]\otimes x_1[n]=\sum_{u=n}^{0}x_2((n-u)\cdot T_e)\cdot x_1(u\cdot T_e)=x_1[n]\otimes x_2[n]$$

În mod evident, s-a obținut (9.40), cu inversarea ordinii în care se sumează termenii.
Ca şi în cazul transformatei Fourier, produsul de convoluție are proprietatea remarcabilă că poate fi pus în legătură cu produsul imaginilor Laplace, respectiv *Z*. Astfel:

$$L(x_1(t)\otimes x_2(t))=X_1(s)\cdot X_2(s) \qquad (9.41_L)$$

$$Z(x_1[n]\otimes x_2[n])=X_1(z)\cdot X_2(z), \qquad (9.41_Z)$$

adică transformatele (Laplace, respectiv *Z*) produsului de convoluție sunt egale cu produsul algebric al transformatelor (Laplace, respectiv *Z*) ale semnalelor convolutate, rezultate cunoscute şi sub numele de **teoremele produsului de convoluție în domeniul** “**timp**”.

Demonstrație:
a) Laplace:
Se procedează ca la demonstrarea aceleiaşi teoreme pentru trnasformatele Fourier:

$$L\left(x_1(t)\otimes_2(t)\right)=\int_0^{\infty}x_1(t)\otimes_2(t)dt=\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)d\tau\right)\cdot e^{-s\cdot t}dt=$$

$$=\int_0^{\infty}x_1(\tau)\cdot\left(\int_0^{\infty}x_2(t-\tau)\cdot e^{-s\cdot t}dt\right)d\tau\underset{(10.23_L)}{=}\int_0^{\infty}x_1(\tau)\cdot X_2(s)\cdot e^{-s\cdot\tau}d\tau=$$

$$=X_2(s)\cdot\int_0^{\infty}x_1(\tau)\cdot e^{-s\cdot\tau}d\tau=X_2(s)\cdot X_1(s)$$

S-a folosit proprietatea celor două semnale de a fi cauzale (ceea ce permite scrierea produsului de convoluție sub forma folosită în cadrul demonstrației) şi s-a utilizat posibilitatea inversării ordinii de integrare.
b) *Z*:
Se porneşte de la produsul transformatelor.

$$X_1(z)\cdot X_2(z)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}x_1(k\cdot T_e)\cdot z^{-k}\right)\cdot\left(\sum_{p=0}^{\infty}x_2(p\cdot T_e)\cdot z^{-p}\right)=$$

$$=\left(x_1(0)+x_1(T_e)\cdot z^{-1}+x_1(2\cdot T_e)\cdot z^{-2}+\ldots\right)\cdot\left(x_2(0)+x_2(T_e)\cdot z^{-1}+x_2(2\cdot T_e)\cdot z^{-2}+\ldots\right)=$$

$$=x_1(0)\cdot x_2(0)+\left[x_1(T_e)\cdot x_2(0)+x_1(0)\cdot x_2(T_e)\right]\cdot z^{-1}+$$

$$+\left[x_1(0)\cdot x_2(2\cdot T_e)+x_1(T_e)\cdot x_2(T_e)+x_1(2\cdot T_e)\cdot x_2(0)\right]\cdot z^{-2}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{u=0}^{n}x_1(u\cdot T_e)\cdot x_2((n-u)\cdot T_e)\right)\cdot z^{-n}=Z(x_1[n]\otimes x_2[n])$$

De asemenea, ca subiect al convoluției pot fi considerate şi imaginile (Laplace sau *Z*) semnalelor, cu definiții adaptate condițiilor lor de existență:

$$X_1(s)\otimes X_2(s)=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\cdot\int_{c-j\infty}^{c-j\infty}X_1(u)\cdot X_2(s-u)du \qquad (9.42_L)$$

$$X_1(z)\otimes X_2(z)=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\cdot\oint_C X_1(u)\cdot X_2\left(\frac{z}{u}\right)\frac{du}{u} \qquad (9.42_Z)$$

Unde $c>\max(\sigma_{a_1},\sigma_{a_2})$, iar C este curba menționată în (9.20) sau în figura 9.4.
Ca şi în cazul transformatei Fourier, convoluția imaginilor are proprietatea remarcabilă că poate fi pus în legătură cu produsul originalelor. Astfel:

$$L^{-1}\left(X_1(s)\otimes X_2(s)\right)=x_1(t)\cdot x_2(t) \qquad (9.43_L)$$

$$Z^{-1}\left(X_1(z)\otimes X_2(z)\right)=x_1[n]\cdot x_2[n], \qquad (9.43_Z)$$

rezultate cunoscute şi sub numele de **teoremele convoluției în domeniul** "**frecvență**".
Demonstrație:
a) Laplace:

$$L^{-1}\left(X_1(s)\otimes X_2(s)\right)=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\int_{c-j\infty}^{c-j\infty}\left(X_1(s)\otimes X_2(s)\right)\cdot e^{s\cdot t}\cdot ds=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\int_{c-j\infty}^{c-j\infty}\left(\frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\int_{c-j\infty}^{c-j\infty}\left(X_1(u)\cdot X_2(s-u)\right)du\right)\cdot e^{s\cdot t}\cdot ds$$

Schimbând ordinea de integrare, se obține:

$$L^{-1}(X_1(s)\otimes X_2(s)) = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\cdot\int_{c-j\infty}^{c-j\infty}(X_1(s)\otimes X_2(s))\cdot e^{s\cdot t}ds =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\int_{c-j\infty}^{c-j\infty} X_1(u)\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\cdot\int_{c-j\infty}^{c-j\infty} X_2(s-u)\cdot e^{s\cdot t}ds\right)du \underset{(10.24_L)}{=}$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\int_{c-j\infty}^{c-j\infty} X_1(u)\cdot e^{u\cdot t}\cdot x_2(t)du = x_1(t)\cdot x_2(t)$$

b) *Z*:
Afirmația (9.43$_Z$) poate fi demonstrată asemănător. Din acest motiv se va prezenta altă demonstrație, ce poate fi adaptată și pentru justificarea relației (9.43$_L$). Astfel, enunțul teoremei este echivalent cu $X_1(z)\otimes X_2(z) = Z(x_{1_e}(t)\cdot x_{2_e}(t))$, deci se va calcula transformata *Z* a produsului:

$$Z(x_1[n]\cdot x_2[n]) = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(nT_e)\cdot \underbrace{x_2(nT_e)}_{Z^{-1}(X_2(z))}\cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n\cdot T_e)\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\cdot\oint_C X_2(u)\cdot u^{n-1}du\right)\cdot z^{-n}$$ I

nversând ordinea de sumare/integrare, rezultă:

$$Z(x_1[n]\cdot x_2[n]) = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\cdot\oint_C \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x_1(n\cdot T_e)\cdot\left(\frac{z}{u}\right)^{-n}}_{X_1\left(\frac{z}{u}\right)}\cdot X_2(u)\frac{du}{u} = X_1(z)\otimes X_2(z)$$

9.6. ENERGIA SEMNALELOR EŞANTIONATE

Fie $x(nT_e)\in \mathbf{C}$ eşantioanele semnalului x(t) şi $\overline{x(nT_e)}$ conjugatele lor. Transformata *Z* a produsului lor este:

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_e)\cdot\overline{x(nT_e)}\cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}|x(nT_e)|^2\cdot z^{-n}$$

Rezultă că P(1) reprezintă energia semnalului eşantionat:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty}|x(nT_e)|^2 \underset{(10.43_Z)}{=} \frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\cdot\oint_C X(u)\cdot\overline{X\left(\frac{1}{u}\right)}\frac{du}{u}$$

Cum x(t) este un semnal cauzal, rezultă că C se poate considera cercul $|u| = 1$, după cum s-a văzut în (9.20) sau în figura 9.4. Rezultă că se poate face schimbarea de variabilă:

$$u = e^{j\cdot\theta} \Rightarrow \frac{1}{u} = e^{-j\cdot\theta}; -\pi\le\theta\le\pi,$$

astfel că X(u) devine $|X(\theta)|\cdot e^{j\cdot\varphi(\theta)}$

În acest mod, expresia energiei semnalului eşantionat devine:

$$E = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|X(\theta)|\cdot e^{j\cdot\varphi(\theta)}\cdot|X(-\theta)|\cdot e^{-j\cdot\varphi(\theta)}\cdot\underbrace{e^{-j\cdot\theta}}_{\frac{1}{u}}\cdot\underbrace{e^{j\cdot\theta}\cdot jd\theta}_{du}$$

În final, ținând cont şi că $|X(\theta)| = |X(-\theta)|$, se obține un rezultat ce se numeşte **teorema lui Parceval pentru semnale eşantionate**, stabilindu-se astfel o legătură între energia lor şi modulul transformatei Z, evaluat pe cercul unitate:

$$E = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|X(\theta)|^2 d\theta \tag{9.44}$$

9.7. TEOREME DE INVERSIUNE

Pentru determinarea funcțiilor original x(t), respectiv $x_e(t)$, s-au specificat deja relațiile integrale (9.5), respectiv (9.21) – transformatele Laplace, respectiv Z inverse. Aceste fiind definite ca integrale ale unor funcții complexe, rezultă că apare dezavantajul necesității unor cunoştințe (mai) avansate de analiză complexă, ca de exemplu teorema reziduurilor.
Cum în cea mai mare parte a aplicațiilor din tehnică transformatele Laplace sau Z se prezintă sub forma unor fracții raționale, există teoreme specifice, care sunt de fapt cazuri particulare ale teoremei reziduurilor.

Definiție

Dacă $X(s)=\dfrac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1 s+a_0}{b_n s^m + b_{n-1}s^{m-1}+...+b_1 s+b_0} := \dfrac{A(s)}{B(s)}$, atunci rădăcinile ecuației $\mathbf{A(s)=0}$ se numesc **zerouri** ale transformatei Laplace, iar rădăcinile ecuației $\mathbf{B(s)=0}$ se numesc **poli** ai transformatei Laplace. Analog pentru transformata Z.

<u>Observație</u>:

Dacă semnalul x(t) este cauzal, atunci $n \le m$ (numărătorul are gradul cel mult egal cu gradul numitorului).
Un procedeu care poate fi luat în considerare este descompunerea funcției X(s) în fracții simple, ale căror transformate inverse se recunosc practic întotdeauna.

Teoremă (Heaviside)

Dacă polii funcției de transfer sunt $s_1, s_2, \ldots, s_M$, fiecare din ele multiplă de $m_1, m_2, \ldots, m_M$ ori, atunci:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{M}\lim_{s\to s_k}\frac{1}{(m_k-1)!}\cdot\left[\frac{A(s_k)}{B(s_k)}\cdot(s-s_k)^{m_k}\cdot e^{s\cdot t}\right]^{(m_k-1)} \tag{9.45}$$

În cazul în care polii funcției de transfer sunt simpli, (9.45) devine:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}\cdot e^{s_k\cdot t} \tag{9.46}$$

Pentru determinarea transformatei Z inverse, se poate observa că aceasta este definită ca o serie de puteri. Rezultă că metoda principală este dezvoltarea expresiei X(z) în serie de puteri. În cazul în care X(z) este o funcție rațională, se poate proceda la descompunerea în fracții simple a funcției $\dfrac{X(z)}{z}$:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{A_2}{z-z_2}+...+\frac{A_m}{z-z_m}\Rightarrow X(z)=A_1\frac{z}{z-z_1}+A_2\frac{z}{z-z_2}+...+A_m\frac{z}{z-z_m}.$$

Din această formă, rezultă ca x(t) se scrie sub forma unei sume de exponențiale. În cazul în care există poli multipli, în X(z) apar (şi) termeni de forma $A_k\dfrac{z}{(z-z_k)^p}$, cărora li se poate aplica derivarea în frecvență (9.32_Z).
O altă metodă ce poate fi aplicată este împărțirea (numărătorului la numitor), care practic este o dezvoltare în serie de puteri:

$X(z)=\dfrac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z+a_0}{b_n z^m + b_{n-1}z^{m-1}+...+b_1 z+b_0}=c_k z^k + c_{k-1}z^{k-1}+...$, unde $k=m-n$. Rezultă că în acest mod s-au determinat eşantioanele semnalului x(t):
$c_k = x(-k\cdot T_e)$, $c_{k-1}=x(-(k-1)\cdot T_e)$, etc.

O altă metodă ce poate fi avută în vedere este utilizarea produsului de convoluție.

9.8. APLICAȚII

9.8.1. Fie semnalul x(t) (impulsul video) din figura 9.5. Să i se calculeze transformata Laplace şi transformata Fourier.

După cum s-a mai procedat şi anterior, x(t) poate fi exprimat ca suma dintre o treaptă unitară pozitivă şi una negativă, întârziată: $x(t)=u(t)-u(t-\tau)$.

Aplicând liniaritatea (9.22$_L$) şi întârzierea în timp (9.23$_L$), rezultă şi considerând $U(s)=L(u(t))$:

$$L(x(t))=X(s)=\left(1-e^{-s\cdot T}\right)\cdot U(s)$$

$$U(s)=\int_0^\infty 1\cdot e^{-s\cdot t}dt=-\left.\frac{e^{-s\cdot t}}{s}\right|_0^\infty=\frac{1}{s}$$

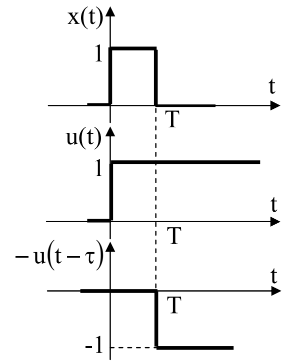


Fig. 9.5:
Impulsul video

Rezultă că $X(s)=\frac{1-e^{-s\cdot T}}{s}$

Cum semnalul este cauzal şi de valoare finită a integralei modulului, transformata Fourier a lui x(t) se poate obține din transformata Laplace, cu substituția $s\to j\omega$:

$$X(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}=T\cdot\frac{e^{-j\cdot\frac{\omega T}{2}}\cdot\left(e^{j\cdot\frac{\omega T}{2}}-e^{-j\cdot\frac{\omega T}{2}}\right)}{2j\cdot\frac{\omega T}{2}}=T\cdot e^{-j\cdot\frac{\omega T}{2}}\cdot\sin c\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Se poate recunoaşte rezultatul obținut prin calculul direct al transformatei Fourier.

9.8.2. Fie un semnal cauzal sub forma unui tren de impulsuri de durată τ şi perioadă T (figura 9.6). Să se determine transformata Laplace a semnalului.

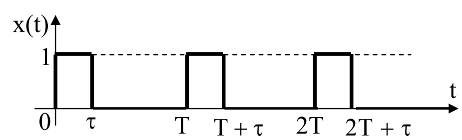


Fig. 9.6
Tren de impulsuri

Din aplicația anterioară, rezultă că transformata Laplace a primului impuls este $\frac{1-e^{-\tau\cdot s}}{s}$.

Impulsul de la momentul kT $(k>0)$ se obține prin întârzierea primului impuls cu kT şi va avea transformata Laplace $\frac{1-e^{-s\cdot T}}{s}\cdot e^{-k\cdot T\cdot s}$ (9.23$_L$). Prin urmare:

$$X(s)=\frac{1-e^{-\tau\cdot s}}{s}\cdot\left(\underbrace{1+e^{-T\cdot s}+e^{-2\cdot T\cdot s}+e^{-3\cdot T\cdot s}+\ldots}_{\text{progresie geometrică cu } q=e^{-T\cdot s}}\right)=\frac{1-e^{-\tau\cdot s}}{s}\cdot\frac{1}{1-e^{-T\cdot s}} \qquad (3.85)$$

Acest semnal nu are valoare finită a integralei modulului, deci nu este îndeplinită condiția de existență a transformatei Fourier. În consecință, nu este corectă aplicarea substituției $s\to j\omega$ pentru a determina funcția spectrală a semnalului. După cum se ştie de la transformata Fourier, acest semnal (ca orice semnal periodic) are serie Fourier şi nu transformată Fourier.

9.8.3. Să se determine transformatele Laplace şi Z pentru semnalele următoare; în cazul transformatei Z, semnalele se consideră eşantionate cu perioada T:

a) $x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{a\cdot t} & t\ge 0\end{cases}$

$$X(s)=\int_0^{\infty} x(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt=\int_0^{\infty} e^{-(s-a)\cdot t}dt=-\left.\frac{e^{-(s-a)\cdot t}}{s-a}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{s-a},$$

deoarece $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-(s-a)\cdot t}=0$ dacă $\sigma>a$ (abscisa de convergență absolută este a)

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\cdot z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} e^{anT}\cdot z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{aT}}{z}\right)^n$$

S-a obținut o progresie geometrică, a cărei rație este $q=\frac{e^{aT}}{z}$. Rezultă condiția de convergență: $|q|\le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{e^{aT}}{z}\right|<1 \Leftrightarrow |z|>\left|e^{aT}\right|$, care este tocmai domeniul de convergență.

$$\Rightarrow X(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{aT}}{z}\right)^n=\frac{1}{1-z^{-1}\cdot e^{aT}}=\frac{z}{z-e^{aT}}$$

b) $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\ge 0\end{cases}$ (treapta unitate)

Se poate observa că dacă $a\to 0$, atunci semnalul exponențial de la pct. a) devine u(t). Rezultă că:

$U(s)=\lim\limits_{a\to 0}\frac{1}{s-a}=\frac{1}{s}$ (s-a regăsit rezultatul de la problema 9.8.1)

$U(z)=\lim\limits_{a\to 0}\frac{z}{z-e^{aT}}=\frac{z}{z-1}$, convergentă pentru $|z|>1$.

Și acest rezultat se poate verifica prin calcul direct:

$$U(z)=\sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\cdot z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}=\frac{z}{z-1}$$

c) $x(t)=u(t)\cdot\sin(a\cdot t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \sin(a\cdot t) & t\ge 0\end{cases}$

Deoarece $\sin(a\cdot t)=\frac{e^{j\cdot a\cdot t}-e^{-j\cdot a\cdot t}}{2j}$, iar transformatele semnalului exponențial sunt cunoscute de la pct. a), rezultă că:

$$X(s)=\int_0^{\infty}\frac{e^{j\cdot a\cdot t}-e^{-j\cdot a\cdot t}}{2j}\cdot e^{-s\cdot t}dt=\frac{1}{2j}\cdot\left(L\left(e^{j\cdot a\cdot t}\right)-L\left(e^{-j\cdot a\cdot t}\right)\right)=\frac{1}{2j}\cdot\left(\frac{1}{s-j\cdot a}-\frac{1}{s+j\cdot a}\right)=\frac{a}{s^2+a^2}$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{j\cdot a\cdot n\cdot T}-e^{-j\cdot a\cdot n\cdot T}}{2j}\cdot z^{-n}=\frac{1}{2j}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{e^{j\cdot a\cdot T}}{z}}-\frac{1}{1-\frac{1}{e^{j\cdot a\cdot T}\cdot z}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2j}\cdot\frac{1-\frac{1}{e^{j\cdot a\cdot T}\cdot z}-1+\frac{e^{j\cdot a\cdot T}}{z}}{1+\frac{1}{z^2}-\frac{e^{j\cdot a\cdot T}}{z}-\frac{1}{e^{j\cdot a\cdot T}\cdot z}}=\ldots=\frac{z\cdot\sin(a\cdot T)}{z^2-2\cdot z\cdot\cos(a\cdot T)+1}$$

În mod asemănător, pentru semnalul $x(t)=u(t)\cdot\cos(a\cdot t)$, se obține:

$$L(\cos(a\cdot t))=\frac{s}{s^2+a^2}$$

$$Z(\cos(a\cdot t)) = z\cdot\frac{z-\cos(a\cdot T)}{z^2-2\cdot z\cdot\cos(a\cdot T)+1}$$

d) $x(t) = u(t-kT) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\ge kT \end{cases}$ (treapta unitate întârziată cu k perioade de eşantionare)

Conform (9.23) – teorema întârzierii, rezultă:

$$X(s) = e^{-skT}\cdot U(s) = \frac{e^{-skT}}{s}$$

$$X(z) = z^{-k}\cdot U(z) = \frac{z^{1-k}}{z-1}; \qquad \text{convergentă pentru } |z|>1.$$

e) $x(t) = u(t)\cdot e^{-b\cdot t}\cdot\sin(a\cdot t)$

Dacă se notează $y(t)=\sin(a\cdot t)$, atunci, în conformitate cu (9.24) – teorema deplasării în frecvenţă sau a înmulţirii cu o exponenţială, rezultă:

$$X(s) = Y(s+b) = \frac{a}{(s+b)^2+a^2}$$

$$X(z) = Y\left(z\cdot e^{bT}\right) = \frac{z\cdot e^{b\cdot T}\cdot\sin(aT)}{\left(z\cdot e^{b\cdot T}\right)^2-2\cdot z\cdot e^{b\cdot T}\cdot\cos(aT)+1} = \frac{z\cdot\sin(aT)}{z^2\cdot e^{b\cdot T}-2\cdot z\cdot e^{b\cdot T}\cdot\cos(aT)+e^{-b\cdot T}}$$

În mod asemănător, pentru $x(t) = u(t)\cdot e^{-b\cdot t}\cdot\cos(a\cdot t)$ se obţine:

$$L\left(e^{-b\cdot t}\cdot\cos(a\cdot t)\right) = \frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$$

$$Z\left(e^{-b\cdot t}\cdot\cos(a\cdot t)\right) = z\cdot e^{b\cdot T}\,\frac{z\cdot e^{b\cdot T}-\cos(a\cdot T)}{z^2\cdot e^{2\cdot b\cdot T}-2\cdot z\cdot e^{b\cdot T}\cdot\cos(a\cdot T)+1} =$$

$$= z\,\frac{z\cdot e^{b\cdot T}-\cos(a\cdot T)}{z^2\cdot e^{b\cdot T}-2\cdot z\cdot\cos(a\cdot T)+e^{-b\cdot T}}$$

9.8.4. Să se determine originalele corespunzătoare următoarelor transformate Laplace:

a) $X(s) = \ln\frac{s+a}{s+b}$. Să se determine x(t).

$$\left.\begin{aligned} X(s) = \ln(s+a)-\ln(s+b) \Rightarrow \frac{dX(s)}{ds} &= \frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b} \\ \frac{dX(s)}{ds} &= L(-t\cdot x(t)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow -t\cdot x(t) = e^{-at}-e^{-bt}$$

$$x(t) = \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}$$

b) $X(s) = \frac{K\cdot s}{a\cdot s^2+\omega_0^2}$

$$X(s) = \frac{K}{a}\cdot\frac{s}{s^2+\frac{\omega_0^2}{a}} \Rightarrow \text{X(s) are doi poli simpli: } s_1 = -j\frac{\omega_0}{\sqrt{a}};\ s_2 = j\frac{\omega_0}{\sqrt{a}}$$

$$x(t) = \frac{K}{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-j\frac{\omega_0}{\sqrt{a}}}{-j\frac{\omega_0}{\sqrt{a}}}\cdot e^{-j\frac{\omega_0}{\sqrt{a}}t}+\frac{j\frac{\omega_0}{\sqrt{a}}}{j\frac{\omega_0}{\sqrt{a}}}\cdot e^{j\frac{\omega_0}{\sqrt{a}}t}\right) = \frac{K}{a}\cdot\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{a}}t\right)$$

c) $X(s)=\dfrac{3\cdot s^2-75}{\left(s^2+25\right)\cdot\left(s^2+6\cdot s+25\right)}$

Descompunând X(s) în fracții simple, se obține:

$$X(s)=\frac{s}{s^2+25}-\frac{s+3}{(s+3)^2+16},$$

în care se pot recunoaşte transformatele Laplace ale funcției cosinus, una dintre ele fiind deplasată în frecvență. Rezultă că :

$$x(t)=\cos(5\cdot t)-e^{-3\cdot t}\cdot\cos(4\cdot t)$$

d) $X(s)=\dfrac{1}{s^2\cdot\left(s^2+4\right)^2}$

Met. 1: Dacă se descompune X(s) în fracții simple, rezultă:

$$X(s)=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C\cdot s+D}{\left(s^2+4\right)^2}+\frac{E\cdot s+F}{s^2+4}=\frac{1}{s^2\cdot\left(s^2+4\right)^2},\forall s$$

Prin identificare, se obține un sistem de (6) ecuații, cu necunoscutele A, B, …, F.
Mai simplu:

$$X(s)=\frac{1}{4}\cdot\frac{s^2+4-s^2}{s^2\cdot\left(s^2+4\right)^2}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{s^2\cdot\left(s^2+4\right)}-\frac{1}{\left(s^2+4\right)^2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{s^2+4-s^2}{s^2\cdot\left(s^2+4\right)}-\frac{1}{\left(s^2+4\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}\right)-\frac{1}{\left(s^2+4\right)^2}\right]$$

În această formă, se pot recunoaşte următoarele:

- $\dfrac{1}{s^2}=-\left(\dfrac{1}{s}\right)'=-\dfrac{dU(s)}{ds}\overset{(9.32_L)}{\Longrightarrow}L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2}\right)=t\cdot u(t)=t$
- $-\dfrac{1}{s^2+4}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{s^2+2^2}=-\dfrac{1}{2}\cdot L(\sin(2\cdot t))\Rightarrow L^{-1}\left(-\dfrac{1}{s^2+4}\right)=-\dfrac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot t)$
- $-\dfrac{1}{\left(s^2+4\right)^2}=\dfrac{1}{4\cdot s}\cdot\left(\dfrac{2}{s^2+2^2}\right)'=\dfrac{1}{4\cdot s}\cdot\left[L(\sin(2\cdot t))\right]'=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{L(-t\cdot\sin(2\cdot t))}{s}\overset{(9.36_L)}{\Longrightarrow}$

  $\Rightarrow L^{-1}\left(\dfrac{1}{\left(s^2+4\right)^2}\right)=\displaystyle\int_0^t\tau\cdot\sin(2\cdot\tau)d\tau=-\dfrac{t}{2}\cdot\cos(2\cdot t)+\dfrac{1}{4}\cdot\sin(2\cdot t)$

În final se obține funcția original:

$$x(t)=\frac{t}{16}-\frac{\sin(2\cdot t)}{32}+\frac{t}{8}\cdot\cos(2\cdot t)-\frac{\sin(2\cdot t)}{16}=\frac{1}{8}\cdot\left[\frac{t}{2}-\frac{3\cdot\sin(2\cdot t)}{8}+t\cdot\cos(2\cdot t)\right]$$

Met. 2: Se aplică teorema lui Heaviside corespunzător celor 3 poli dubli ($s_1=s_2=0$; $s_3=s_4=-2\cdot j$; $s_3=s_4=2\cdot j$) ai funcției X(s):

$$x(t)=\frac{1}{(2-1)!}\left[\frac{e^{s\cdot t}}{\left(s^2+4\right)^2}\right]'\Bigg|_{s=0}+\frac{1}{(2-1)!}\left[\frac{e^{s\cdot t}}{s^2(s-2\cdot j)^2}\right]'\Bigg|_{s=-2\cdot j}+\frac{1}{(2-1)!}\left[\frac{e^{s\cdot t}}{s^2(s+2\cdot j)^2}\right]'\Bigg|_{s=2\cdot j}=\ldots$$

e) $X(z)=\dfrac{z\cdot\left(1-e^{-a\cdot T}\right)}{(z-1)\cdot\left(z-e^{-a\cdot T}\right)}$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-e^{-a\cdot T}}\Rightarrow X(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-a\cdot T}},$$

în care se recunosc transformatele Z ale semnalelor eşantionate u(t) şi exponențial. Rezultă că se obține :

$$x_e(t)=\left(1-e^{a\cdot t}\right)\cdot\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-e^{a\cdot n\cdot T_e}\right)\cdot\delta(t-n\cdot T_e)$$

f) $X(z)=\ln\frac{z+a}{z}$, unde $|a|<|z|$

Dezvoltând X(z) în serie de puteri, se obține:

$$X(z)=\ln\left(1+\frac{a}{z}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{a^n}{n}\cdot z^{-n},$$

Identificând această relație cu definiția (9.16) a transformatei Z, coeficienții variabilei z^{-n} sunt, evident, eşantioanele funcției x(t). Rezultă că:

$$x_e(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{a^{n\cdot T_e}}{n\cdot T_e}\cdot\delta(t-n\cdot T_e)$$

9.8.5. Să se determine produsul de convoluție al următoarelor semnale:

a) $x_1(t)=\begin{cases}u(t) & \text{pentru} \quad 0<t<T\\ 0 & \text{altfel}\end{cases}$; $x_2(t)=u(t)\cdot a^t$, cu $0<a<1$

$$x(t)=x_1(t)\otimes x_2(t)=\int_0^t x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)d\tau$$

- Dacă $t<T$, atunci $x_1(\tau)=1$. Rezultă că:

$$x(t)=\int_0^t 1\cdot x_2(t-\tau)d\tau=-a^t\cdot\left.\frac{a^{-\tau}}{\ln(a)}\right|_0^t=\frac{a^t-1}{\ln(a)}$$

- Dacă $t\geq T$, atunci $x_1(t)=0$. Rezultă că:

$$x(t)=\int_0^T 1\cdot x_2(t-\tau)d\tau+\int_T^t 0\cdot x_2(t-\tau)d\tau=-a^t\cdot\left.\frac{a^{-\tau}}{\ln(a)}\right|_0^T=\frac{a^t-a^{t-T}}{\ln(a)}$$

În concluzie:

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{a^t-1}{\ln(a)} & \text{pentru} \quad 0<t<T\\ a^t\cdot\dfrac{1-a^{-T}}{\ln(a)} & \text{pentru} \quad t\geq T\end{cases}$$

b) $x_{1_e}(t)=u(t)-u(N\cdot T)$; $x_{2_e}(t)=u(t)\cdot a^t$, cu $0<a<1$, T fiind perioada de eşantionare.

$$x_e(t)=x_{1_e}(t)\otimes x_{2_e}(t)=\sum_{i=0}^{k}x_1(i\cdot T)\cdot x_2((k-i)\cdot T)$$

- Dacă $0\leq k\leq N-1$, atunci $x_1(i\cdot T)=1,\forall i=\overline{1,k}$. Rezultă că:

$$x_e(t)=\sum_{i=0}^{k}x_2((k-i)\cdot T)=a^{k\cdot T}\cdot\sum_{i=0}^{k}a^{-i\cdot T}=a^{k\cdot T}\cdot\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{a}\right)^{i\cdot T}=a^{k\cdot T}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{(k+1)\cdot T}}{1-\frac{1}{a^T}}=$$

$$=\frac{a^{(k+1)\cdot T}-1}{a^T-1}$$

- Dacă $k>N-1$, atunci $x_1(i\cdot T)=0,\forall i=\overline{N,k}$. Rezultă că:

$$x_e(t)=\sum_{i=0}^{N-1}x_2((k-i)\cdot T)=a^{k\cdot T}\cdot\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{1}{a}\right)^{i\cdot T}=a^{k\cdot T}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{N\cdot T}}{1-\frac{1}{a^T}}=$$

$$=a^{(k-N+1)\cdot T}\cdot\frac{a^{N\cdot T}-1}{a^T-1}$$

În concluzie :

$$x_e(t)=\begin{cases}\dfrac{a^{(k+1)\cdot T}-1}{a^T-1} & \text{pentru} \quad 0\le k\le N-1\\ a^{(k-N+1)\cdot T}\cdot\dfrac{a^{N\cdot T}-1}{a^T-1} & \text{pentru} \quad k\ge N\end{cases}$$

Observație:

Cea mai bună metodă pentru a verifica corectitudinea rezolvării unei probleme este de a încerca (o) altă metodă. În cazul de față, se poate folosi comutativitatea produsului de convoluție:

a) $x(t)=x_1(t)\otimes x_2(t)=\int_0^t x_1(t-\tau)\cdot x_2(\tau)d\tau$

- Dacă $t<T$, atunci $t-\tau<T-\tau<T$ şi deci $x_1(t-\tau)=1$. Rezultă că:

$$x(t)=\int_0^t 1\cdot x_2(\tau)d\tau=\left.\frac{a^\tau}{\ln(a)}\right|_0^t=\frac{a^t-1}{\ln(a)}$$

- Dacă $t\ge T$, atunci $x_1(t-\tau)=0$ pentru $\tau<t-T$. Rezultă că:

$$x(t)=\int_0^{t-T}0\cdot x_2(\tau)d\tau+\int_{t-T}^t 1\cdot x_2(\tau)d\tau+=\left.\frac{a^\tau}{\ln(a)}\right|_{t-T}^t=\frac{a^t-a^{t-T}}{\ln(a)}$$

Se observă că s-au obținut aceleaşi rezultate ca în cazul precedent.

b) $x_e(t)=x_{1_e}(t)\otimes x_{2_e}(t)=\sum_{i=0}^k x_1((k-i)\cdot T)\cdot x_2(i\cdot T)$

- Dacă $0\le k\le N-1$, atunci $k-i\le N-1-i\le N-1$ şi deci $x_1(i\cdot T)=1,\forall i=\overline{1,k}$. Rezultă că:

$$x_e(t)=\sum_{i=0}^k x_2(i\cdot T)=\sum_{i=0}^k a^{i\cdot T}=\frac{a^{(k+1)\cdot T}-1}{a^T-1}$$

- Dacă $k>N-1$, atunci $x_1((k-i)\cdot T)=0,\forall i=\overline{0,k-N+1}$. Rezultă că:

$$x_e(t)=\sum_{i=k-N+1}^k x_2(i\cdot T)=\frac{a^{(k+1)\cdot T}-a^{(k-N+1)\cdot T}}{a^T-1}=a^{(k+1)\cdot T}\cdot\frac{1-a^{-N\cdot T}}{a^T-1}=$$

$$=a^{(k-N+1)\cdot T}\cdot\frac{a^{N\cdot T}-1}{a^T-1}$$

Şi în acest caz, rezultatele sunt identice cu cele obținute anterior.

10. TRANSFORMATA FOURIER DISCRETĂ

Transformata **F**ourier **d**iscretă (**TFD** sau **DFT** – **D**iscrete **F**ourier **T**ransform) este un instrument matematic de analiză a semnalelor numerice, asemănător cu transformata sau seriile Fourier în cazul semnalelor analogice. Dar semnalele analogice pot fi eşantionate, deci pot fi transformate în semnale numerice printr-un proces numit codificare. Ca urmare, TFD este şi un instrument eficient de analiză prin metode numerice a semnalelor analogice.

10.1. RECAPITULARE ŞI DEFINIŢIE

Pentru definirea TFD se reamintesc următoarele:

1. Fie semnalul x(t) de durată T (finită) (figura 10.1a), al cărui spectru de amplitudini $\left|X(j\omega)\right|$ este reprezentat în figura 10.1b; s-a considerat că x(t) are caracteristica spectrală limitată la pulsaţia (frecvenţa) maximă ω_M. Se face precizarea că toate consideraţiile ce se vor face asupra spectrelor de amplitudini rămân valabile şi pentru spectrele de faze. Din acest motiv, pentru a nu complica inutil figurile 10.1, nu s-au mai reprezentat şi spectrele de faze. Se reaminteşte expresia transformatei Fourier:

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}dt=\int_{0}^{T}x(t)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}dt \tag{10.1}$$

2. Semnalul x(t) poate fi prelungit prin periodicitate, obţinându-se astfel semnalul periodic $x_T(t)$ din figura 10.1c. Expresia sa este:

$$x_T(t)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}x(t-p\cdot T) \tag{10.2}$$

În conformitate cu (6.3), semnalul periodic $x_T(t)$ se poate modela cu seria Fourier complexă, cu spectrul de amplitudini reprezentat în figura 10.1d:

$$x_T(t)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{n_c}\cdot e^{j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}, \tag{10.3}$$

unde $$\omega_0=\frac{2\cdot\pi}{T} \tag{10.4}$$

şi, conform relaţiei (6.5):

$$A_{n_c}=\frac{2}{T}\cdot\int_{T}x(t)\cdot e^{-j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}dt=\frac{2}{T}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot e^{-j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}dt, \tag{10.5}$$

deoarece $x(t)=0$ pentru $t<0$ şi $t>T$. Din (10.5) rezultă:

$$A_{n_c}=\frac{2}{T}\cdot X(jn\omega_0) \tag{10.6}$$

iar expresia (10.3) devine:

$$x_T(t)=\frac{1}{T}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(jn\omega_0)\cdot e^{j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t} \tag{10.7}$$

Se poate observa (figura 10.1d) că spectrul semnalului periodic, $x_T(t)$, reprezintă eşantionarea caracteristicii spectrale $\left|X(j\omega)\right|$ a semnalului x(t), cu perioada de eşantionare ω_0, plus o modificare de scară cu $\frac{1}{T}$ (figurile 10.1b şi 10.1d). Într-o exprimare echivalentă, spectrul semnalului neperiodic este înfăşurătoarea semnalului neperiodic. Expresia analitică a semnalului neperiodic devine astfel:

$$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{T}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(jn\omega_0)\cdot e^{j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t} & \text{pentru } 0\le t\le T\\ 0 & \text{altfel}\end{cases} \tag{10.8}$$

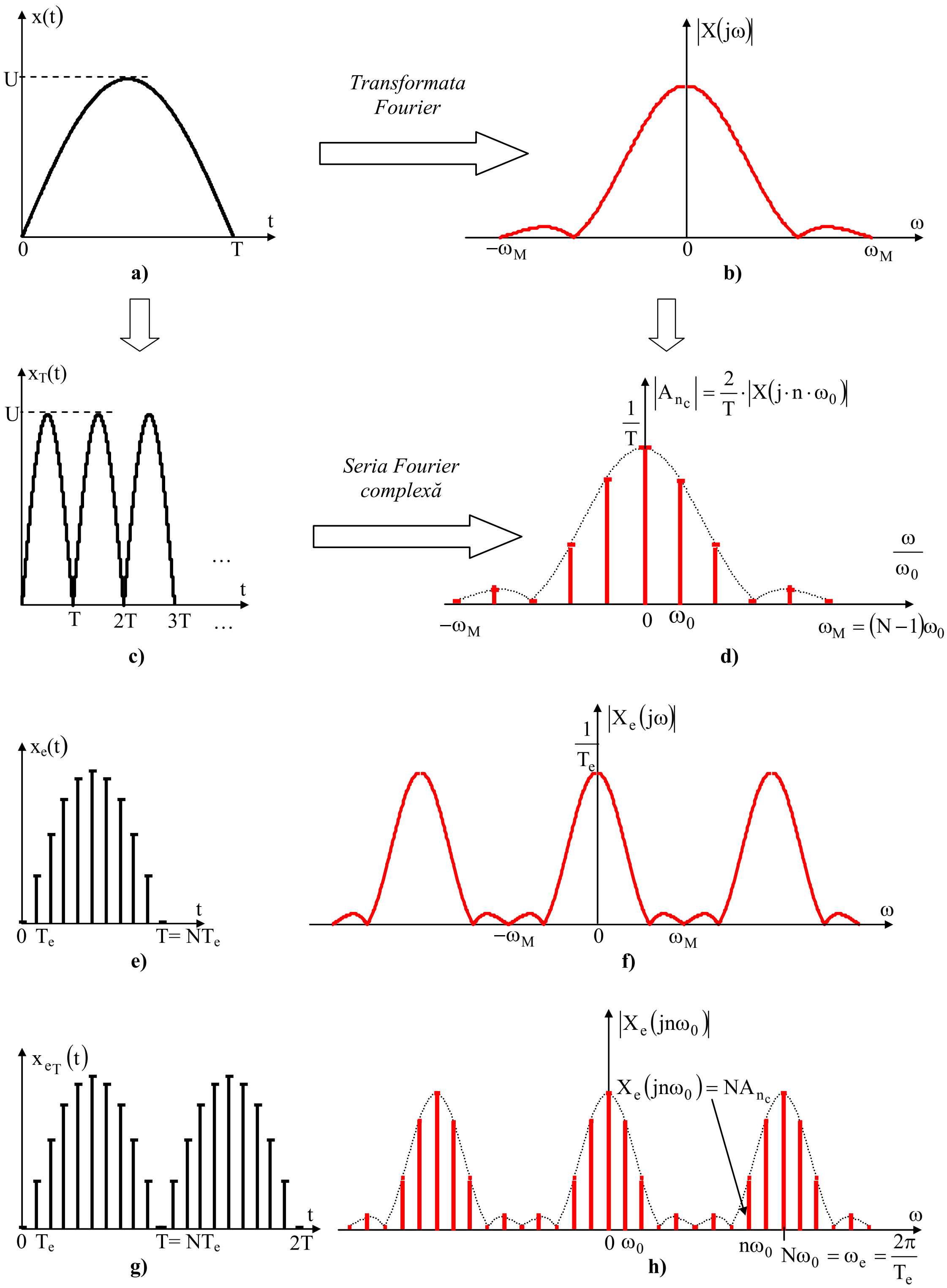


Fig. 10.1 Forme de undă şi caracteristici spectrale

a) Forma de undă a semnalului neperiodic;
b) Spectrul de amplitudini al semnalului neperiodic;
c) Prelungirea prin periodicitate a semnalului neperiodic;
d) Spectrul de amplitudini al semnalului periodic;
e) Semnalul neperiodic eşantionat;
f) Spectrul de amplitudini al semnalului eşantionat;
g) Prelungirea prin periodicitate a semnalului eşantionat;
h) Eşantionarea spectrului semnalului eşantionat periodic.

3. Se consideră acum x[k] semnalul eşantionat, cu perioada de eşantionare $T_e = \frac{1}{2 \cdot f_M}$, unde $f_M = \frac{\omega_M}{2 \cdot \pi}$ (figura 10.1e).

Spectrul de amplitudini al semnalului eşantionat este prezentat în figura 10.1f. Din punct de vedere analitic, acesta este o repetare periodică a spectrului semnalului neeşantionat:

$$X_e(j\omega) = \frac{1}{T_e} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - n \cdot \omega_e)) \tag{10.9}$$

În banda de bază $(n = 0)$, transformata Fourier a semnalului eşantionat devine:

$$X_e(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{T_e}, \tag{10.10}$$

$X(j\omega)$ fiind dat de (10.1); dacă în această integrală se discretizează timpul cu pasul de eşantionare T_e, rezultă că numărul intervalelor de eşantionare este:

$$N = \frac{T}{T_e} \tag{10.11}$$

Se obține:

$$X(j\omega) = T_e \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k \cdot T_e) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot k \cdot T_e} \tag{10.12}$$

şi (10.10) devine:

$$X_e(j\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k \cdot T_e) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot k \cdot T_e} \tag{10.13}$$

4. Semnalul $x_e(t)$ se prelungeşte prin periodicitate, repetându-l la intervalele de timp $T = N \cdot T_e$, ca în figura 10.1g. Semnalul obținut astfel s-a notat $x_{e_T}(t)$. Se va discretiza axa frecvențelor din caracteristica spectrală $X_e(j\omega)$ (figura 10.1f), cu pasul ω_0, obținându-se astfel caracteristica spectrală din figura 10.1h. Alegerea perioadei de eşantionare la limita impusă de teorema lui Shannon: $\omega_e = 2 \cdot \omega_M$, atrage după sine valabilitatea relației $2 \cdot \omega_M = N \cdot \omega_0$ (adică semnalul discretizat şi spectrul său se reprezintă cu acelaşi număr de eşantioane), deoarece, folosind (10.4), (10.11) rezultă că:

$$\left.\begin{aligned} \omega_e = \frac{2 \cdot \pi}{T_e} = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{T}{N}} = N \cdot \omega_0 \\ \omega_e = 2 \cdot \omega_M \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2 \cdot \omega_M = N \cdot \omega_0 \tag{10.14}$$

Ca urmare, (10.13) devine:

$$\begin{aligned} X_e(jn\omega_0) := X[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot k \cdot T_e} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot e^{-j \cdot n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot k \cdot T_e} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot e^{-j \cdot n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N \cdot T_e} \cdot k \cdot T_e} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot e^{-j \cdot n \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N}}, \end{aligned} \tag{10.15}$$

$\forall n = \overline{0, N-1}$

Dacă se înlocuieşte $X(j\omega)$ din (10.10) în (10.8), şi ținând cont că $X(j\omega)$ este limitată (superior) la frecvența ω_M, se obține:

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{T}\cdot\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}X(jn\omega_0)\cdot e^{j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}=\dfrac{T_e}{T}\cdot\sum\limits_{n=0}^{N-1}X[n]\cdot e^{j\cdot n\cdot\omega_0\cdot t} & \text{pentru } 0\le t\le T\\ 0 & \text{altfel}\end{cases}\tag{10.16}$$

În (10.16) se discretizează timpul t cu pasul T_e, punând $t=k\cdot T_e$, valorile lui k corespunzând intervalului $[0;T]$: $k=\overline{0,N-1}$. Rezultă:

$$x(k\cdot T_e):=x[k]=\frac{T_e}{N\cdot T_e}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}X[n]\cdot e^{j\cdot n\cdot\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot k\cdot T_e}=$$

$$=\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}X[n]\cdot e^{j\cdot n\cdot\frac{2\cdot\pi}{N\cdot T_e}\cdot k\cdot T_e}=\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}X[n]\cdot e^{j\cdot n\cdot k\cdot\frac{2\cdot\pi}{N}},\tag{10.17}$$

$\forall k=\overline{0,N-1}$

Făcând analogia cu seria Fourier complexă, rezultă $A_{n_c}=\dfrac{X_e(jn\omega_0)}{N}$. (10.18)

Dacă se notează

$$w_N=e^{j\cdot\frac{2\cdot\pi}{N}}\tag{10.19}$$

numărul complex de modul unitar şi de argument $\dfrac{2\cdot\pi}{N}$, reprezentat ca vector, şi w_N^n, $n=\overline{0,N-1}$, steaua simetrică a vectorilor de modul unitar (figura 10.2), relaţiile (10.15) şi (10.17) devin respectiv:

$$X[n]:=F_d\{x[k]\}=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]\cdot w_N^{-n\cdot k}\tag{10.20}$$

$\forall n=\overline{0,N-1}$

$$x[k]:=F_d^{-1}\{X[n]\}=\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}X[n]\cdot w_N^{n\cdot k}\tag{10.21}$$

$\forall k=\overline{0,N-1}$

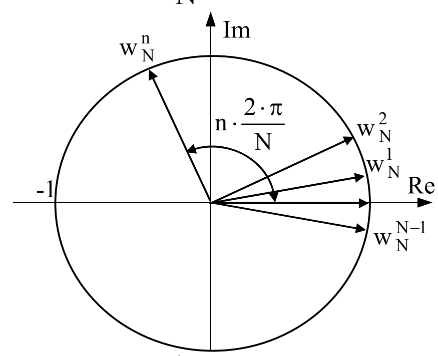


Fig. 10.2
Steaua vectorilor unitari
w_N^n, $n=\overline{0,N-1}$

Transformata Fourier discretă directă (TFD) este definită de (10.15) sau de (10.20). Transformata Fourier discretă inversă (TFDI) este definită prin (10.17) sau prin (10.21).

10.2. CALCULUL TRANSFORMATEI FOURIER DISCRETE

Dacă se scriu (10.20), pentru cele N valori ale lui n, se obţin N relaţii algebrice, care pot fi scrise sub forma matricială:.

$$\begin{bmatrix}X[0]\\X[1]\\X[2]\\\dots\\X[N-1]\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1&\dots&1\\1&w_N^{-1}&w_N^{-2}&\dots&w_N^{-(N-1)}\\1&w_N^{-2}&w_N^{-4}&\dots&w_N^{-2\cdot(N-1)}\\\dots&\dots.&\dots&\dots&\dots\\1&w_N^{-(N-1)}&w_N^{-2\cdot(N-1)}&\dots&w_N^{-(N-1)^2}\end{bmatrix}}_{W}\cdot\begin{bmatrix}x[0]\\x[1]\\x[2]\\\dots\\x[N-1]\end{bmatrix}\tag{10.22}$$

Observând simetria matricei W din (10.22) (adică identitatea liniilor şi coloanelor având acelaşi indice) şi proprietăţile mărimilor w (de exemplu: $w_N^N=1$, $w_N^{\frac{N}{2}}=-1$, $w_N^{\frac{N}{4}}=-j$, $w_N^{\frac{3\cdot N}{4}}=j$), au fost dezvoltaţi algoritmi de calcul (mai) rapid a valorilor X[n].

De asemenea, pentru calculul TFDI, pornind de la (10.21) rezultă:

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \dots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_N^1 & w_N^2 & \dots & w_N^{N-1} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \dots & w_N^{2\cdot(N-1)} \\ \dots & \dots. & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w_N^{N-1} & w_N^{2\cdot(N-1)} & \dots & w_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \dots \\ X[N-1] \end{bmatrix} \tag{10.23}$$

10.3. ALGORITMI DE CALCUL A TFD

În (10.22), matricea W este de tipul $N \times N$, de unde rezultă că pentru fiecare componentă X(n) a spectrului sunt necesare N înmulțiri (complexe) şi sumarea a N termeni, adică N-1 adunări. Cum sunt N componente de calculat, rezultă că în total sunt N^2 înmulțiri şi $N \cdot (N-1)$ adunări (complexe). Dar o înmulțire complexă constă din 4 înmulțiri şi 2 adunări reale, astfel că numărul operațiilor este $4N^2$ înmulțiri şi $2N^2 + 2N(N-1)$ adunări reale. În total sunt necesare $8N^2 - 2N$ operații, deci complexitatea aritmetică a algoritmului este $O(N^2)$.

Ținând cont de simetria matricei W, se pot dezvolta metode pentru micşorarea numărului de operații. Astfel, se poate observa cu uşurință că:

$$w_N^{-N\cdot k} = \left(w_N^N\right)^{-k} = e^{-j\cdot 2\cdot k\cdot \pi} = 1 \tag{10.24}$$

$$w_N^{-(2\cdot k+1)\cdot\frac{N}{2}} = \underbrace{w_N^{-N\cdot k}}_{1} \cdot w_N^{\frac{N}{2}} = e^{-j\cdot\frac{2\cdot\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}} = e^{-j\cdot\pi} = -1 \tag{10.25}$$

Ideea algoritmului este aceea de a descompune TFD de ordin N în transformate de ordin mai mic. De exemplu, se poate presupune că N nu este număr prim, deci există N_1 şi N_2 (prime între ele sau cu divizori comuni) astfel încât $N = N_1 N_2$.Un caz particular important este $N = R^M$, R fiind numit bază, obținându-se astfel algoritmii în baza R.

Pentru a explica o largă categorie de algoritmi, se poate porni de la reprezentarea indicilor sub forma:

$$\begin{aligned} n &= K_1 n_1 + K_2 n_2 \qquad (\operatorname{mod} N) \\ k &= K_3 k_1 + K_4 k_2 \qquad (\operatorname{mod} N) \end{aligned} \tag{10.26}$$

De exemplu, dacă baza este R, atunci (10.26) se poate scrie sub forma:

$$\begin{aligned} n &= n_1 + \frac{N}{R}\cdot n_2; \qquad n_1 = \overline{0; \frac{N}{R}-1};\ n_2 = \overline{0; R-1} \\ k &= R\cdot k_1 + k_2; \qquad k_1 = \overline{0; \frac{N}{R}-1};\ k_2 = \overline{0; R-1} \end{aligned}, \tag{10.27}$$

rezultând astfel algoritmi cu decimare în timp, sau sub forma:

$$\begin{aligned} n &= R\cdot n_1 + n_2; \qquad n_1 = \overline{0; \frac{N}{R}-1};\ n_2 = \overline{0; R-1} \\ k &= k_1 + \frac{N}{R}\cdot k_2; \qquad k_1 = \overline{0; \frac{N}{R}-1};\ k_2 = \overline{0; R-1} \end{aligned}, \tag{10.28}$$

rezultând astfel algoritmi cu decimare în frecvență.

Dacă $R = 2$ $\left(\text{sau}\, N = 2^M\right)$, atunci se obține algoritmul în baza 2 (Cooley & Tukey, 1965), care este primul algoritm dezvoltat pentru calculul TFD.

Există şi alți algoritmi, dezvoltați ulterior, ca de exemplu algoritmul în baza 4 (foarte asemănător cu cel în baza 2), algoritmul cu baze despicate (split radix), algoritmul cu baze mixte sau algoritmul Winograd. Aceste metode sunt cunoscute sub numele de **t**ransformată **F**ourier **r**apidă (**TFR** sau **FFT** – **F**ast **F**ourier **T**ransform, în limba engleză).

10.3.1. Algorimul Cooley & Tukey cu decimare în timp

$$R=2\Rightarrow\begin{cases} n=n_1+\frac{N}{2}\cdot n_2; & n_1=\overline{0;\frac{N}{2}-1};\ n_2=\overline{0;1}\\ k=2\cdot k_1+k_2; & k_1=\overline{0;\frac{N}{2}-1};\ k_2=\overline{0;1}\end{cases}$$

$$X[n]=X\left[n_1+\frac{N}{2}\cdot n_2\right]=\sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{k_2=0}^{1}x[2\cdot k_1+k_2]\cdot w_N^{-\left(n_1+\frac{N}{2}\cdot n_2\right)\cdot(2\cdot k_1+k_2)}=$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{k_2=0}^{1}x[2\cdot k_1+k_2]\cdot w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1-n_1\cdot k_2-n_2\cdot k_1\cdot N-\frac{N}{2}\cdot n_2\cdot k_2}=$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{k_2=0}^{1}x[2\cdot k_1+k_2]\cdot w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1-n_1\cdot k_2-\frac{N}{2}\cdot n_2\cdot k_2}\cdot\underbrace{\left(w_N^N\right)^{-n_2\cdot k_1}}_{1}$$

Dar suma interioară nu conține decât 2 termeni, astfel că se poate scrie:

$$X[n]=\sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1}x[2\cdot k_1]\cdot w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1}+\sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1}x[2\cdot k_1+1]\cdot w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1-n_1-\frac{N}{2}\cdot n_2}=$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1}x[2\cdot k_1]\cdot w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1}+w_N^{-n_1-\frac{N}{2}\cdot n_2}\cdot\sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1}x[2\cdot k_1+1]\cdot w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1}$$

Cum însă:

$$\begin{cases} w_N^{-n_1-\frac{N}{2}\cdot n_2}=e^{-j\cdot\frac{2\cdot\pi}{N}\cdot n_1}\cdot e^{-j\cdot\frac{2\cdot\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}\cdot n_2}=w_N^{-n_1}\cdot\left(e^{-j\cdot\pi}\right)^{n_2}=w_N^{-n_1}\cdot(-1)^{n_2}\\ w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1}=e^{-j\cdot\frac{2\cdot\pi}{N}\cdot 2\cdot n_1\cdot k_1}=e^{-j\cdot\frac{2\cdot\pi}{\frac{N}{2}}\cdot n_1\cdot k_1}=w_{\frac{N}{2}}^{-n_1\cdot k_1}\end{cases},$$

şi $n=n_1+\frac{N}{2}\cdot n_2$, cu $n_2=\overline{0;1}$, rezultă că X[n] se poate scrie sub formele:

$$\begin{aligned}n_2=0\Rightarrow X[n_1]&=\sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1}x[2\cdot k_1]\cdot w_{\frac{N}{2}}^{-n_1\cdot k_1}+w_N^{-n_1}\cdot\sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1}x[2\cdot k_1+1]\cdot w_{\frac{N}{2}}^{-n_1\cdot k_1}=\\&=TFD_{\frac{N}{2}}\{x[2\cdot k_1]\}+w_N^{-n_1}\cdot TFD_{\frac{N}{2}}\{x[2\cdot k_1+1]\}\end{aligned}\qquad(10.29)$$

$$\begin{aligned}n_2=1\Rightarrow X\left[n_1+\frac{N}{2}\right]&=\sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1}x[2\cdot k_1]\cdot w_{\frac{N}{2}}^{-n_1\cdot k_1}-w_N^{-n_1}\cdot\sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1}x[2\cdot k_1+1]\cdot w_{\frac{N}{2}}^{-n_1\cdot k_1}=\\&=TFD_{\frac{N}{2}}\{x[2\cdot k_1]\}-w_N^{-n_1}\cdot TFD_{\frac{N}{2}}\{x[2\cdot k_1+1]\}\end{aligned}\qquad(10.30)$$

Se vede astfel că s-a transformat calculul $TFD_N\{x[n]\}$ în două $TFD_{\frac{N}{2}}$, una pentru secvențele formate din eşantioanele pare (obținute la multiplii pari ai perioadei de eşantionare T_e) şi una pentru secvențele formate din eşantioanele impare (obținute la multiplii impari ai perioadei de eşantionare T_e). Acesta este şi motivul pentru care această abordare se numeşte decimare în timp.

Relațiile (10.29) şi (10.30) sunt ilustrate schematic în figura 10.3.

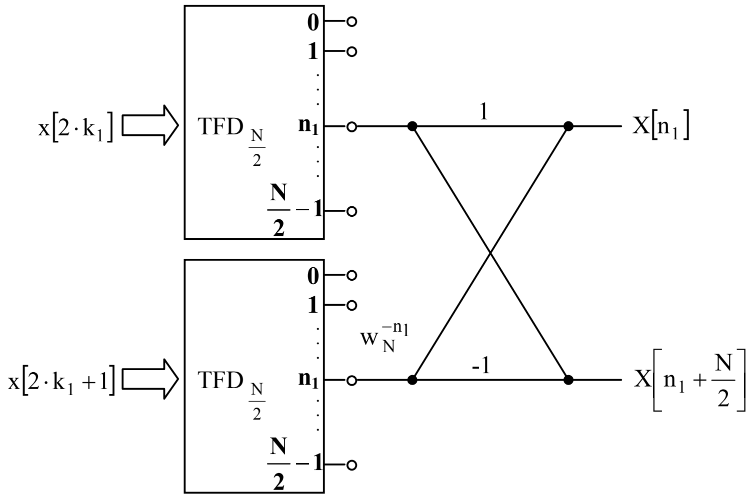


Fig. 10.3
Graful obținut după prima decimare

Procedeul se aplică în continuare transformatei de ordinul $\frac{N}{2}$ şi aşa mai departe, până la obținerea TFD_2. Trecerea de la $TFD_{\frac{N}{2}}$ la TFD_N se face prin intermediul unor structuri de tip "fluture", prezentată în figura 10.4, care constă dintr-o înmulțire cu w_N^{-n} (care se mai numeşte şi factor de rotație, modulul său fiind unitar) şi o TFD_2.

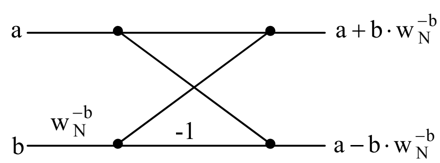
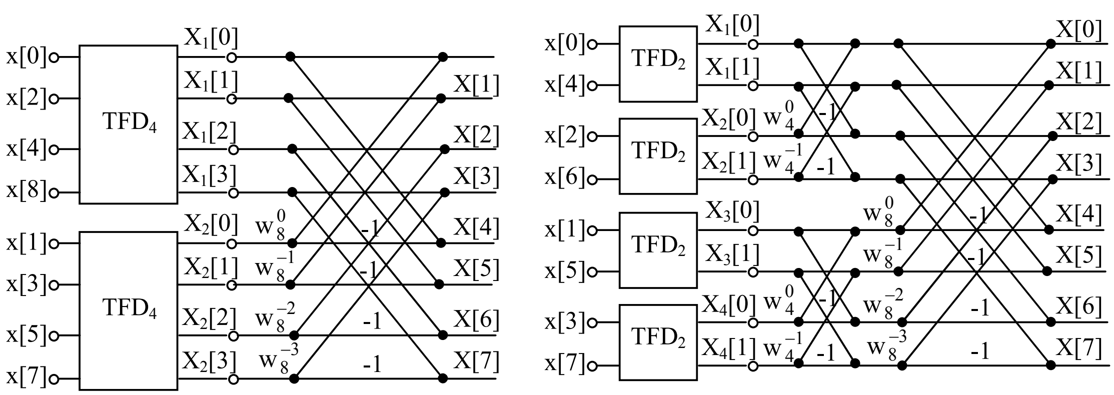


Fig. 10.4
Structura fluturelui la decimarea în timp

La fiecare pas, se dublează numărul de TFD ce trebuie determinate, numărul de puncte în care se calculează micşorându-se de două ori, astfel că sunt necesare N adunări şi $\frac{N}{2}$ înmulțiri (complexe). Cum $N=2^M$, rezultă că sunt necesari $\log_2 N$ paşi, astfel că în total vor fi necesare $N\cdot\log_2 N$ adunări şi $\frac{N}{2}\cdot\log_2 N$ înmulțiri (complexe). Complexitatea algoritmului devine $O(N\cdot\log_2 N)$..

Ca exemplificare, în figura 10.5 se prezintă succesiunea operațiilor în cazul $N=8$.



a) **b)**

Fig. 10.5: Decimarea în timp pentru $N=8$

a) Etapa întâi;
b) Etapa a doua.

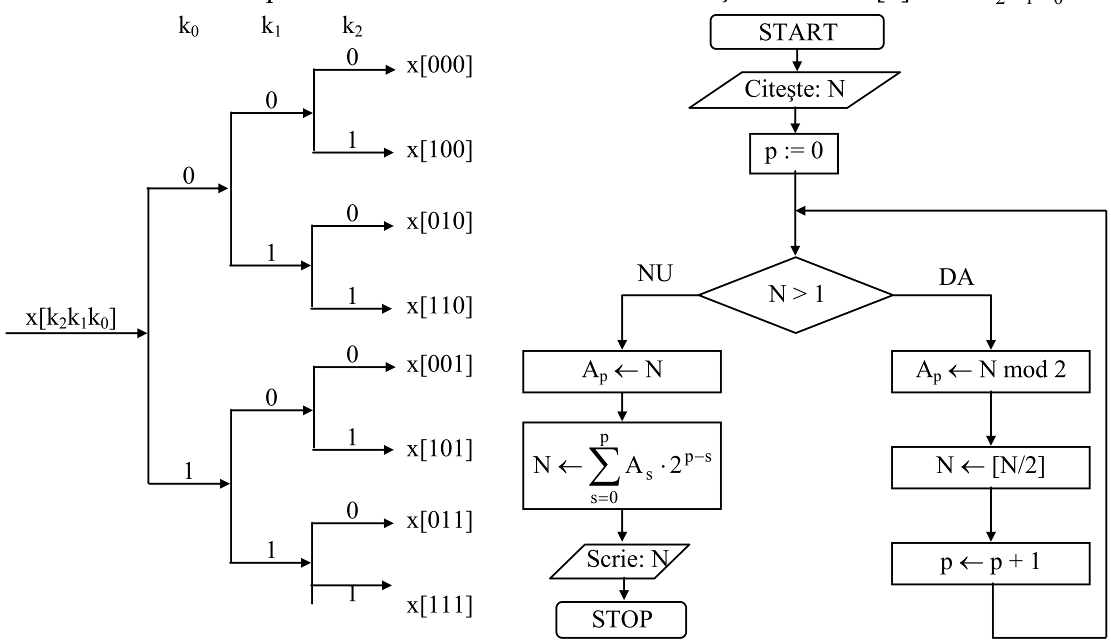
Graful complet al TFD_8 se obține înlocuind cele 4 TFD_2 din figura 10.5b cu structuri (fluturi) de tipul celor din figura 10.4, cu observația că w_N^{-b} devine $w_2^{-1} = e^{-j\cdot\frac{2\cdot\pi}{2}} = -1$.

De asemenea, din figura 10.5b se mai poate observa şi că ordinea eşantioanelor X[n] este cea naturală, în timp ce eşantioanele x[k] sunt permutate. Pentru a determina permutarea eşantioanelor x[k], în tabelul 10.1 se prezintă comparativ ordinea lor naturală şi cea corectă, reprezentate în baza 2.

Tab. 10.1

x[k] în ordinea naturală		x[k] în ordinea corectă	
k în baza 10	k în baza 2	k în baza 10	k în baza 2
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Din tabelul 10.1, se observă cu uşurință că reprezentările binare ale eşantioanelor în ordinea corectă sunt ”oglinditele” reprezentărilor binare ale eşantioanelor în ordinea naturală. Altfel spus, eşantioanele semnalului trebuie aplicate în ordinea inversă a biților reprezentărilor lor în baza 2, recalculând numerele binare obținute astfel în baza 10. Se poate demonstra că afirmația rămâne valabilă $\forall\ N = 2^M$, observând că procedeul de împărțire succesivă la 2 (cerut de algoritmul în discuție) este folosit şi pentru determinarea cifrelor unui număr binar. Rezultă că examinând biții indicelui eşantionului, începând cu cel mai puțin semnificativ, acesta va fi plasat pe poziția corespunzătoare, după cum se poate observa din figura 10.6, în care s-a reprezentat acelaşi caz $N = 8$ (3 biți), considerându-se că reprezentarea în baza 2 a indicelui k a eşantionului x[k] este $\overline{k_2k_1k_0}$.



a) **b)**

Fig. 10.6: Sortarea eşantioanelor cu inversarea biților

a) principiul de lucru
b) schema logică a algoritmului de inversare a ordinii cifrelor numărului N

10.3.2. Algorimul Cooley & Tukey cu decimare în frecvență

Dacă se foloseşte scrierea:

$$\begin{cases} n = 2\cdot n_1 + n_2; & n_1 = \overline{0;\frac{N}{2}-1};\ n_2 = \overline{0;1} \\ k = k_1 + \frac{N}{2}\cdot k_2; & k_1 = \overline{0;\frac{N}{2}-1};\ k_2 = \overline{0;1} \end{cases},$$

atunci, printr-un procedeu similar cu cel folosit la algoritmul cu decimare în timp, rezultă:

$$X[n] = X[2\cdot n_1 + n_2] = \sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{k_2=0}^{1} x\left[k_1 + \frac{N}{2}\cdot k_2\right]\cdot w_N^{-(2\cdot n_1+n_2)\cdot\left(k_1+\frac{N}{2}\cdot k_2\right)} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{k_2=0}^{1} x\left[k_1 + \frac{N}{2}\cdot k_2\right]\cdot w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1 - n_2\cdot k_1 - n_1\cdot k_2\cdot N - \frac{N}{2}\cdot n_2\cdot k_2} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{k_2=0}^{1} x\left[k_1 + \frac{N}{2}\cdot k_2\right]\cdot w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1 - n_2\cdot k_1 - \frac{N}{2}\cdot n_2\cdot k_2}\cdot \underbrace{\left(w_N^N\right)^{-n_1\cdot k_2}}_{1}$$

Dar suma interioară nu conține decât 2 termeni, astfel că se poate scrie:

$$X[n] = \sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1} x[k_1]\cdot w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1 - n_2\cdot k_1} + \sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left[k_1 + \frac{N}{2}\right]\cdot w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1 - n_2\cdot k_1 - \frac{N}{2}\cdot n_2} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1} x[k_1]\cdot w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1 - n_2\cdot k_1} + w_N^{-\frac{N}{2}\cdot n_2}\cdot \sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left[k_1 + \frac{N}{2}\right]\cdot w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1 - n_2\cdot k_1}$$

Cum însă:

$$\begin{cases} w_N^{-\frac{N}{2}\cdot n_2} = e^{-j\cdot\frac{2\cdot\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}\cdot n_2} = \left(e^{-j\cdot\pi}\right)^{n_2} = \cdot(-1)^{n_2} \\ w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1} = e^{-j\cdot\frac{2\cdot\pi}{N}\cdot 2\cdot n_1\cdot k_1} = e^{-j\cdot\frac{2\cdot\pi}{\frac{N}{2}}\cdot n_1\cdot k_1} = w_{\frac{N}{2}}^{-n_1\cdot k_1} \end{cases},$$

şi $n = n_1 + \frac{N}{2}\cdot n_2$, cu $n_2 = \overline{0;1}$, rezultă că X[n] se poate scrie sub formele:

$$n_2 = 0 \Rightarrow X[2\cdot n_1] = \sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1} x[k_1]\cdot w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1} + \sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left[k_1 + \frac{N}{2}\right]\cdot w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1} =$$

$$= TFD_{\frac{N}{2}}\left\{x[k_1] + x\left[k_1 + \frac{N}{2}\right]\right\}$$

$$n_2 = 1 \Rightarrow X[2\cdot n_1 + 1] = \sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1} x[k_1]\cdot w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1 - k_1} - \sum_{k_1=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left[k_1 + \frac{N}{2}\right]\cdot w_N^{-2\cdot n_1\cdot k_1 - k_1} =$$

$$= TFD_{\frac{N}{2}}\left\{x[k_1] - x\left[k_1 + \frac{N}{2}\right]\right\}\cdot w_N^{-k_1}$$

Se vede astfel că s-a transformat calculul $TFD_N\{x[n]\}$ în două $TFD_{\frac{N}{2}}$, una pentru secvențele formate din eşantioanele pare (obținute la multiplii pari ai perioadei de eşantionare T_e) şi una pentru secvenţele formate din eşantioanele impare (obţinute la multiplii impari ai perioadei de eşantionare T_e).

Şi în acest caz, trecerea de la $TFD_{\frac{N}{2}}$ la TFD_N se face prin intermediul unor structuri de tip "fluture", prezentată în figura 10.7.

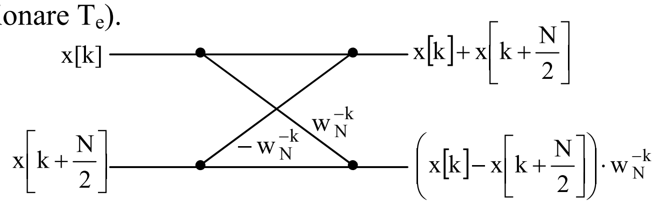


Fig. 10.7
Structura fluturelui la decimarea în frecvenţă

10.4. PROPRIETĂŢILE TFD

10.4.1. Legătura dintre TFD şi transformata *Z*

Semnalul eşantionat x[k] are transformata *Z*:

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]\cdot z^{-k}$$

Dacă variabila z se plasează pe cercul unitate şi se eşantionează cu pasul $\frac{2\cdot\pi}{N}$, atunci este evident că eşantioanele acesteia devin w_N^k, unde $k=\overline{0;N-1}$. În acest caz, transformata *Z* devine TFD. În acest mod, cele mai multe dintre proprietăţile transformatei Z se transferă natural către TFD.

10.4.2. Liniaritatea

$$F_d\{a\cdot x[k]+b\cdot y[k]\}=a\cdot F_d\{x[k]\}+b\cdot F_d\{y[k]\}$$

Demonstraţia este evidentă.

10.4.3. Inversiunea în timp

$$F_d\{x[-k]\}=X[-n]=X[N-n]$$

Demonstraţie:

Se va arăta că $F_d^{-1}\{X[N-n]\}=x[-k]$

În conformitate cu (10.21), se scrie:

$$x[-k]=\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}X[n]\cdot w_N^{-n\cdot k}$$

Cu notaţia $r=N-n$, rezultă:

$$x[-k]=\frac{1}{N}\cdot\sum_{r=1}^{N}X[N-r]\cdot w_N^{-(N-r)\cdot k}=\frac{1}{N}\cdot\sum_{r=1}^{N}X[N-r]\cdot w_N^{r\cdot k}$$

Dar $X(0)=X(n)$ şi $w_N^{N\cdot r}=1$, astfel că se poate scrie:

$$x[-k]=\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}X[N-n]\cdot w_N^{r\cdot k}=F_d^{-1}\{X[N-n]\}$$

10.4.4. Deplasarea ciclică în timp şi în frecvenţă

$$F_d\{x[k-r]\}=X[n]\cdot w_N^{-n\cdot r}$$

$$F_d^{-1}(X[n-r])=x[k]\cdot w_N^{k\cdot r}$$

Demonstraţie:

În conformitate cu (10.21), rezultă:

$$x[k-r]=\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}X[n]\cdot w_N^{n\cdot(k-r)}=\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}X[n]\cdot w_N^{n\cdot k}\cdot w_N^{-n\cdot r}$$

Factorul $w_N^{-n\cdot r}$ introduce o deplasare adițională a fazei, modulul spectrului nefiind modificat. Altfel spus, secvenței periodice $\{x[k-r]\}$, ce se obține prin rotația cu r eşantioane a celei originale $\{x[k]\}$, îi corespunde acelaşi spectru de amplitudini, cu modificarea corespunzătoarei a spectrului de faze.
Pentru a doua relație se scrie, în conformitate cu (10.20):

$$X[n-r] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot w_N^{-(n-r)\cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot w_N^{-n\cdot k}\cdot w_N^{k\cdot r}$$

Rezultă că, dacă semnalul este multiplicat cu un factor exponențial, spectrul va fi deplasat spre dreapta cu k intervale.

10.4.5. TFD a secvenței complex conjugate

Dacă se notează $X^*[n]$ conjugata expresiei X[n], atunci:

$$F_d\{x[k]\} = X^*[-n] = X^*[N-n]$$

Demonstrație:

Dacă în (10.20) se consideră conjugata ambilor membri, şi observând că $\left(w_N^{-nk}\right)^* = w_N^{nk}$ şi $x^*[k] = x[k]$, (eşantioanele semnalului fiind numere reale,) rezultă că:

$$X^*[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x^*[k]\cdot w_N^{n\cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot w_N^{n\cdot k}$$

Cu substituția $n \to -n$, se obține:

$$X^*[-n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot w_N^{-n\cdot k}$$

Secvența $\{x[k]\}$ este reală dacă şi numai dacă $X^*[-n] = X^*[N-n]$.

10.4.6. Convoluția ciclică

Dacă se consideră semnalele eşantionate $x_1[k]$ şi $x_2[k]$, convoluția lor periodică (produsul de convoluție ciclic) este, prin definiție:

$$x[k] = x_1[k]\otimes x_2[k] := \sum_{i=0}^{N-1} x_1[i]\cdot x_2[k-i], \forall k = \overline{0;N-1}$$

De asemenea, se defineşte produsul de convoluție ciclică a imaginilor $X_1[n]$ şi $X_2[n]$:

$$X[n] = X_1[n]\otimes X_2[n] := \sum_{i=0}^{N-1} X_1[i]\cdot X_2[n-i], \forall n = \overline{0;N-1}$$

Atunci sunt adevărate următoarele (teoremele convoluției ciclice):

$$F_d\{x_1[k]\otimes x_2[k]\} = X_1[n]\cdot X_2[n]$$

$$F_d^{-1}\{X_1[n]\otimes X_2[n]\} = N\cdot x_1[k]\cdot x_2[k]$$

Demonstrație:

$$F_d\left\{\underbrace{x_1[k]\otimes x_2[k]}_{x[k]}\right\} := X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot w_N^{-n\cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{i=0}^{N-1} x_1[i]\cdot x_2[k-i]\right)\cdot w_N^{-n\cdot k} =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} x_1[i]\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} x_2[k-i]\cdot w_N^{-(k-i)\cdot n}}_{X_2[n]}\right)\cdot w_N^{-i\cdot n} = X_2[n]\cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} x_1[i]\cdot w_N^{-i\cdot n}}_{X_1[n]} =$$

$$= X_2[n]\cdot X_1[n]$$

Teorema convoluției ciclice a imaginilor se demonstrează asemănător:

$$F_d^{-1}\left\{\underbrace{X_1[n]\otimes X_2[n]}_{X[n]}\right\} := x[k] = \frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\cdot w_N^{n\cdot k} = \frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{i=0}^{N-1} X_1[i]\cdot X_2[n-i]\right)\cdot w_N^{n\cdot k} =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} X_1[i]\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1} X_2[n-i]\cdot w_N^{(n-i)\cdot k}}_{x_2[k]}\right)\cdot w_N^{i\cdot k} = x_2[k]\cdot\underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} X_1[i]\cdot w_N^{i\cdot k}}_{N\cdot x_1[k]} =$$

$$= N\cdot x_1[k]\cdot x_2[k]$$

De asemenea, se poate demonstra cu uşurinţă comutativitatea convoluţiei ciclice:

$$x_1[k]\otimes x_2[k] = \sum_{i=0}^{N-1} x_1[i]\cdot x_2[k-i] = \sum_{i=0}^{N-1} x_2[i]\cdot x_1[k-i] = x_2[k]\otimes x_1[k]$$

$$X_1[n]\otimes X_2[n] = \sum_{i=0}^{N-1} X_1[i]\cdot X_2[n-i] = \sum_{i=0}^{N-1} X_2[i]\cdot X_1[n-i] = X_2[n]\otimes X_1[n]$$